آقای حسینعلی پور

دینامیک سیالات محاسباتی

آزمایشگاه CFD و مرکز CAE ← ۷۳۹۱۲۹۴۴
۷۳۹۱۲۱۴۴

آزمایشگاه شماره ۱۰ موتورهای احتراق داخلی (ماشین‌های دوار) ← ۷۳۹۱۲۹۴۰

اتاق ← ۷۳۹۱۲۹۳۹

---

۴ نمره تمرین + ۳ پروژه برنامه‌نویسی

امتحان ۱۰ نمره + سمینار در حدود CFD
در مورد تکنیک‌های جدید ما

چرا CFD ؟

تجزیه و تحلیل یک مسئله پیچیده

اگر یک سیستم موجود باشد ← چطور آن را ارزیابی کنیم

Performance → index

مثل راندمان در موتور حرارتی که عامل مناسب در موتور می‌تواند باشد

اگر هدف خاصی برای انجام کاری را دنبال می‌کنیم ← دنبال ساخت تجهیزات

روش طراحی چیست؟

Design

← ما هدف‌ها را می‌دهیم و ما طراحی را انجام می‌دهیم.

اگر سیستم موجود باشد و می‌خواهیم آن را بهبود ببخشیم ← Optimization

— ابزارهای تحلیلی

قوانین پایه در یک سری مدل‌ها ← استفاده می‌کنیم

← تبادل اطلاعات را در درون سیستم و بین سیستم و محیط کمی و تحلیل با دقت کنیم.

مدل‌های مکانیکی
" حرارتی
" الکتریکی
" شیمیایی

⇐ قوانین پایه ← قوانین نیوتن
قوانین ترمودینامیک
قوانین ماکسول
"

— ابزارهای عددی

زمانی استفاده می‌شود که ابزار تحلیلی قابل حل نباشد

معادلات ناویر استوکس غیرخطی (PDE)، Partial و کوپل هستند. توأم هم دارند

باید این معادلات PDE تبدیل شوند به معادلات جبری (با روش‌های عددی)

ایراد معادلات جبری چیست؟ PDE در یک محیط پیوسته عمل می‌کند اما معادلات جبری نقاط را گسسته‌سازی می‌کند.

در حقیقت به صورت شبکه‌بندی محیط (گسسته‌سازی) استفاده از معادلات جبری ممکن است.

ما به طور کلی ۲ راه داریم ① معادلات را گسسته‌سازی کنیم ② محیط را شبکه‌بندی کنیم

همچنین حل معادلات هم مشکل است.

در این درس ① هندسه ساده بررسی می‌شود ② روش finite volume (حجم محدود) استفاده می‌شود ③ بر روی تکنیک‌های verification بحث می‌شود ④ حل معادلات ناویر استوکس را مرور می‌کنیم.

هدف: آشنایی با تکنیک‌های عددی / روش اعمال روی ناویر استوکس / نحوه نوشتن برنامه / استفاده از برنامه‌های تجاری

اهداف این درس:
- توسعه و معرفی یک روش عددی که فرآیندهای مربوط به انتقال حرارت، جرم و مکانیک سیالات را با روش عددی حل کند
- مبانی توسعه یک روش عددی را بفهمیم. (روش‌های عددی برای حل نیاز دیفرانسیل‌ها)
- آموزه‌های روش‌های عددی توسط مثال

هذلولوی — سهموی — بیضوی

سرفصل‌های کلی مطالب درس
۱- مروری بر معادلات حاکم (بقای جرم، انرژی، مومنتم) (دسته‌بندی و شناخت ترم‌های این معادلات در شکل‌گیری پدیده‌های فیزیکی) (دسته‌بندی معادلات)

۲- مقدمات
- شبکه‌بندی
- دسته‌بندی
  - یک راهه One way
  - دو راهه Two way

۳- معرفی روش‌های عددی {۲ جلسه تعریف}
- معرفی یک سری حل‌های کلی (سازگاری، پایداری، همگرایی و ...)
- حل‌ها (تحلیل جبری)

۴- روش Finite volume و Central volume
۱- ابتدا روش را برای معادلات ساده بحث شود ← Diffusion Type Problem {یک بعدی پایا + گذرا}
۲- مسائل شود فقط در حالتی (انتقال حرارت، جرم، مومنتم) ← {گذرا}
۳- مسائل از نوع شود در حضور یک میدان سرعت معلوم ← {یک بعدی تعریف}
۴- مسائل مکانیک سیالات ← {یک بعدی پایا و گذرا نهایی}

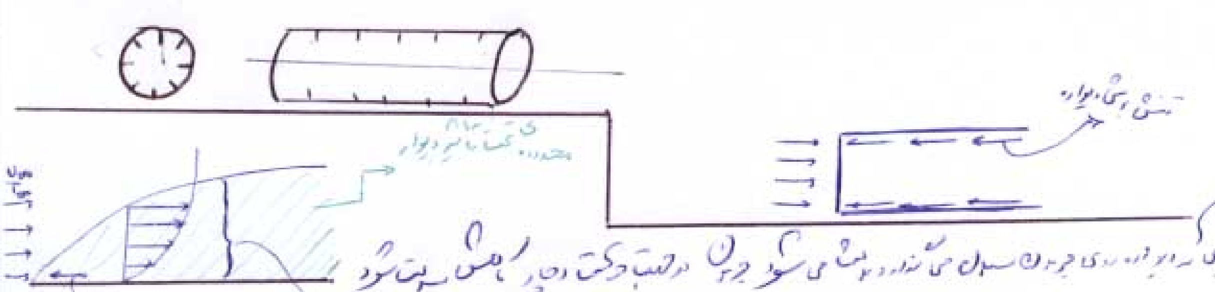
۵- مباحث انتقال حرارت
انتقال حرارت در کانال‌ها
- جریان توسعه‌یافته ساده.
- جریان توسعه‌یافته پیچیده.

۶- مدل‌سازی توربولانس
- جبری
- دیفرانسیلی: تک معادله‌ای، دو معادله‌ای، تک و نیم معادله‌ای
- مرتبه بالاتر: RSM، ASM

۷- محاسبات حرارتی

چند مثال

جریان توسعه یافته
درون لوله پیچ‌دار



توضیح لایه مرزی

✓ تأثیری که دیواره روی جریان سیال می‌گذارد و باعث می‌شود جریان در جهت حرکت دچار کاهش سرعت شود

لبه سیال که سرعت روی دیواره سیال تأثیر می‌گذارد

خارج از دیواره در سطح اثرات مومنتوم نفوذ دیواره روی مومنتوم غیر نفوذ سیال کمتر می‌شود

فاصله‌ای که مومنتم نفوذ دیواره در درون سیال نفوذ می‌کند را ضخامت لایه مرزی گویند (در هر مقطع)

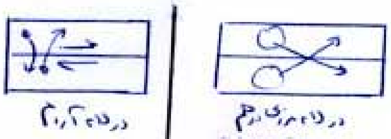
✓ با حرکت سیال به جلو نفوذ مومنتوم دیواره بیشتر می‌شود و روش اعمال مومنتوم از طریق لزجت سیال صورت می‌گیرد که باعث گرادیان سرعت می‌شود → $\frac{\partial u}{\partial y}$

✓ گرادیان سرعت روی دیواره برای ما خیلی مهم است چون تنش روی دیواره را به ما می‌دهد $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$ $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$

✓ در نتیجه اعمال مومنتم دیواره به سیال از طریق خاصیت لزجت سیال اعمال می‌شود که باعث گرادیان سرعت می‌شود.

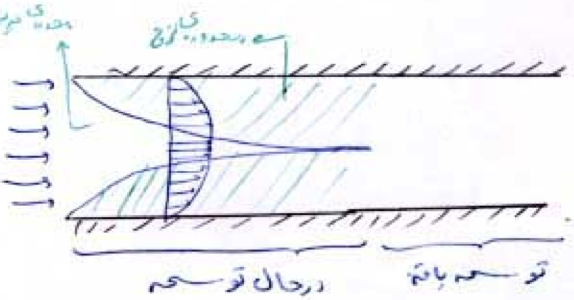
✓ در هیدرولیک انرژی فشاری مهم است . برای انتقال یک مقدار مشخص سیال از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر مقدار سیال باید علیه زور معادل فشار محیط کار انجام دهد که سیال برای انتقال باید به محیط اعمال کند تا حرکت کند (Flow work)

✓ در انتقال گرمای جریان آشفته مکانیزم انتقال مومنتوم بالا رفته است (بر اثر تنش برشی) یعنی اینکه در این مکانیزم علاوه بر مولکول‌ها که بین لایه‌ها منتقل می‌شوند (تبادل مومنتوم) چون میزان تنش بزرگ‌تر شده است . تکه‌های بزرگ‌تری از سیال بین لایه‌ها در حال جابجا شدن و تأثیرگذاری هستند و تبادل مومنتوم بیشتر خواهد بود.



در توربولنس وجود دو ورتیسیته‌ها و تنش برشی باعث می‌شود که دسته‌ای از لایه‌ها ... که می‌خواهند تنش برشی را افزایش دهند

پایان توضیح حل دوره مرکزی



— در داخل لوله هم لایه مرزی وجود دارد

✓ ما دو محدوده‌ی توسعه یافته و در حال توسعه داریم

در محدوده‌ی در حال توسعه چون شتاب وجود دارد (تغییرات سرعت) به این نام است.
(چرا شتاب ؟ چون مقطع عبوری سیال به اثر بزرگ شدن لایه مرزی در حال کوچک شدن است پس سرعت افزایش می‌یابد $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$
پس به جهت سرعت سیال افزایش یافته است)

پروفیل سرعت از یک مقطع به مقطع دیگر در حال توسعه یافتن است (سرعت در حال زیاد شدن است به دلیل بالا) در محلی که لایه‌های مرزی به هم می‌رسند دیگر توسعه یافتگی (در جهت حرکت) نخواهیم داشت چون دلیلی برای افزایش سرعت (در جهت حرکت) وجود ندارد و $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ خواهد شد.

✓ نوع روش حل و نوع معادلات حاکم در بخش توسعه یافته و در حال توسعه هم متفاوت است.

✓ در شاره‌ای که هستیم تولید نمی‌دارد (هدف ما از مبنی افزایش انتقال حرارت بوسیله افزایش سطح انتقال حرارت است)

✓ مبنی را در حالتی قرار می‌دهیم که ضریب انتقال حرارت کوچکی داشته باشیم.

← اختلاف دما سطح با دمای متوسط سیال

$q = h A \Delta T$

سطح

← ضریب انتقال حرارت جابجایی

✓ ضریب انتقال حرارت جابجایی تابع پارامترهای خواص سیال و نوع رژیم جریان می‌باشد

$h = f$ (تأثیرات خواص سیال ، تأثیرات رژیم جریان)

← Re این تأثیرات را نشان می‌دهد (چون تأثیرات رژیم جریان یعنی وابستگی به سرعت رژیم جریان هست سیال جابجایی)

$Re = \frac{VD}{\nu}$ قطر (هندسه) سرعت
ویسکوزیته (نیرو) ... سینماتیک

و ویسکوزیته سیال) ← ... خواص سیال

← Pr این را نشان می‌دهد (خواص سیال را در بر دارد)

نفوذ مومنتوم و ویسکوزیته سینماتیکی

ضریب سینماتیکی ← عکس نفوذ حرارتی

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ → نفوذ حرارتی

است که به صورت بدون بعد در Re و Pr خلاصه می‌شود می‌گیریم.

✓ نسبت ν به α به نحوی تشابه بین مکانیزم انتقال مومنتوم و انتقال حرارت است که با Pr نشان می‌دهیم.

منظور از تئوری تشابه (مثل انتقال انتقال مومنتوم و انتقال حرارت):

همان عاملی که انتقال مومنتوم را کنترل می‌کند انتقال حرارت را هم کنترل می‌کند. پس بین این دو مکانیزم تشابه وجود دارد.

این تشابه به ما این امکان را می‌دهد که بتوانیم کوپلینگ بین میزان جریان و میزان انتقال حرارت را محاسبه بکنیم.

مثال) تشابه کلبورن

← از تشابه بین انتقال مومنتوم و انتقال حرارت

انتقال مومنتوم ↓
ΔP: ایجاد افت فشار،
τ: ایجاد تنش برشی

انتقال حرارت ↓
انتقال حرارت بین دیواره و سیال

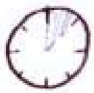
نکته: $q = hA\Delta T$ یک رابطه مهندسی ساده است که نیوتن ارائه کرد. در حقیقت چیزی به نام انتقال حرارت جابجایی وجود ندارد (در مکانیزم) هدایت و تشعشع در واقع تنها مکانیزم‌های موجود هستند)

(ما می‌دانیم انتقال مومنتوم از دیواره به سیال‌های کنار دیواره توسط هدایت است اما توده‌های سیال در اثر جابجایی و حرکت به طرف سطح آمده و توده‌های گرم شده را از سطح به بقیه جاها جابجا و پخش می‌کنند.)

این فرمول نیز بین لایه‌های روی دیواره و لایه‌های دور از دیواره است. در حقیقت $\Delta T = T_s - T_\infty$ (سطح) (که این رابطه تراز دمایی را اساس می‌کند)

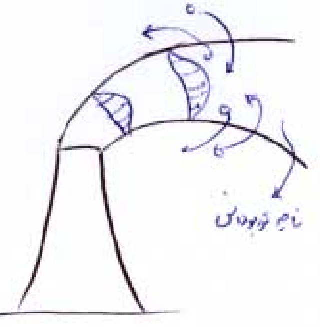
✓ ما با استفاده از پره‌ها نیز سطح انتقال را افزایش داده، به تبع آن انتقال حرارت را زیاد می‌کنیم.

✓ وجود پین در مثال فوق باعث می‌شود جریان‌ها به جریان‌هایی که سایه توسعه یافته نمی‌شوند و روش‌های ساده تحلیلی برای این حالت نامناسب‌اند. بهتر است از روش عددی استفاده شود چون سطح هندسه پیچیده است اما بهتر است حل را برای یک مقطع در جهت توسعه یافته حل کرده و سپس پاسخ را تعمیم دهیم.



✓ شیب پروفیل سرعت و دما برای ما مهم است.
شیب پروفیل سرعت روی دیواره تنش برشی را می‌دهد.
شیب پروفیل دما که h و انتقال حرارت را به ما می‌دهد.

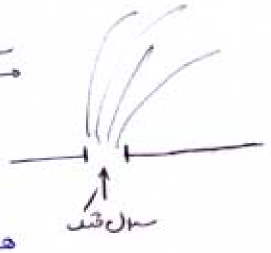
برای به دست آوردن اطلاعات فوق باید میدان را حل کرده و اطلاعات را داشته باشیم. پس در حل عددی مشکل ما همین است که مجبوریم برای محاسبه تنش از جریان نیز جریان را تحلیل کنیم.



دود خروجی از یک دودکش و محاسبه توزیع دما و فشار

هم پدیده های سیالاتی داخل دودها و هم انتقال حرارت درون لوله و بیرون آن به علت نوع جریان بسیار پیچیده است و با یک حل تحلیلی نمی توان به پاسخ رسید.
با یک CFD قابل حل است.

سیال داغ روی سطحی که سرد کننده دارد، توزیع دما چگونه است

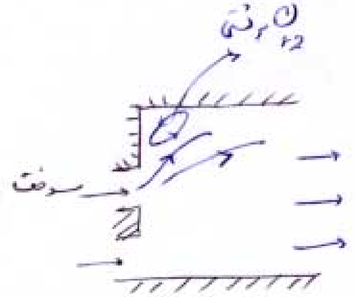


سیال داغی روی سطحی در حال حرکت است.
سطح توسط سیالی خنک می شود (مثلاً سیال داغ بسیار داغ است و ممکن است به سطح صدمه بزند)
در توربین گاز پره هایی ممکن است طراحی شوند که سوراخ هایی دارند

هدف این است که سطح این سیال داغ را تحمل کند.

✓ شکل سوراخ، زاویه، و جنس سطح خنک کن روی توزیع دما تاثیر گذار است.

✓ برای محاسبه پروفیل دما روی دیواره روش های تحلیلی نمی توانند پاسخ گو باشند پس از روش های عددی باید استفاده کرد.



محاسبه توزیع سرعت فشار و دما... در یک محفظه احتراق

پدیده هایی که دخالت دارند:
- جریان سیال (fluid flow)
- توزیع دما
- توزیع جرم
- واکنش های شیمیایی
- واکنش های توربولانس

✓ تنها توسط حل عددی این پدیده ها قابل تحلیل هستند.

روش های پیش بینی:
- تست موضوع روی جسم اصلی (مثلاً کل هواپیما را تست کنیم): گران و در اکثر موارد غیر ممکن
- تست مدل ساخته شده از روی ساخت واقعی (موتورها، هندسی و سینماتیکی مشابه باشند)
  ✓ معایب اینکه: خطوط جریان موجود باشد تا اثرات نیروی آن را مشاهده کنیم
- بر اساس محاسبات ریاضی
  - متدهای کلاسیک ریاضی
  - حل عددی

فوائد حل بر اساس محاسبات ریاضی: ① هزینه پایین ② سرعت بالا ③ جواب های کامل ④ شبیه سازی شرایط واقعی ⑤ مشاهده تاثیر هر یک پارامتر

انواع مسائل در مهندسی:
- گروه A : توضیح ریاضی دقیق و حالت تحلیلی موجود است (اشکال ساده، رفتار مواد کاملاً ساده، جریان آرام ---)
- گروه B : توضیح ریاضی دقیق و کاملی موجود نمی‌باشد (جریان‌های چندفازی، جریان توربولانسی پیچیده ---)

مشکلات بررسی مسائل گروه B : ① احتمال دور از واقعیت بودن حالت تجربی ② مشکلات در سطح‌های عملی (مثلاً در مواردی که شدت جریان زیاد باشد ...)
③ چندحلی بودن مشکلات دارد

برای حالت B راه حل تحلیلی وجود ندارد و ما تلاش می‌کنیم حل را به سمت گروه A پیش ببریم.

✓ حالت تجربی هم به تنهایی پاسخگوی مسائل علمی نمی‌باشد

✓ ما با روش‌های عددی در طراحی آزمایش‌ها و میزان تست‌هایی که لازم است در حالت تجربی انجام دهیم، به ما کمک می‌کند.

- معمولاً ترکیبی از حل عددی و کار تجربی نتیجه‌بخش است.

توضیح ریاضی یک پدیده فیزیکی

✓ پدیده‌هایی که مد نظر ما است بیشتر در زمینه انتقال است

انتقال: اسکالر / برداری / تانسوری

✓ معمولاً با معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم سروکار داریم.

مکانیزم انتقال: نفوذ / جابجایی

- معادلات مختلف
- ما یک شکل عمومی برای این معادلات پیدا می‌کنیم.
(با همین معادلات این کار را می‌کنیم چون با وجود اینکه سروکار داشتن با پدیده‌های مختلف و توضیح‌های ریاضی مختلف، معادله دیفرانسیل واحدی برای همه قابل حصول است)
- مدل توربولانسی
- متغیرهای مستقل (موجود در معادله عمومی) ← ما انتخاب این متغیرها را می‌کنیم که متغیرهای زمانی و مکانی کاهش یابد و معادله ساده شود
- مختصات در یک جهت یا در دو جهت (جهت یعنی متغیرها یک طرفه یا دو طرفه)

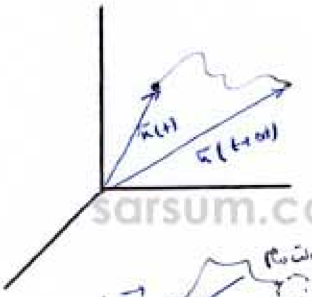
✓ برای معادلات حاکم بر پدیده‌های مختلف، برای بررسی دستگاه: ① دستگاه مختصات درنظر که در آن دستگاه استخراج معادلات صورت می‌گیرد [لاگرانژی / اویلری
② شکل حجم کنترلی که انتخاب می‌کنیم.
③ ارتباط بین دستگاه‌های مختلف

① توضیح در مورد انتخاب دستگاه

ما در خواهیم مشخصه های میدان جریان سیال و تغییر مشخصه ها را بررسی کنیم باید متغیرهای مستقل را بدانیم (مثل P، ρ، ...)
چون اینها در چارچوب توابعی هستند باید قوانین بقا را فرموله کنیم.

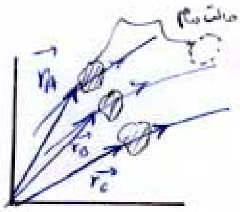
- نگرش لاگرانژی برای استخراج این معادلات:

موقعیت ذرات سیال را در یک قاب بررسی کنیم و توسط یک بردار مکان آنها را ثبت کرده و ذره را دنبال می کنیم و در موقعیت جدید یک بردار مکان جدید در زمان $t+\Delta t$ به آن نسبت می دهیم.



توسط این بردارها معادلات نگرش $\vec{a}$ بدست می آید.

متغیر مستقل اصلی ← زمان



اگر تعدادی ذرات سیال را در میدان سیال مشخص کنیم (مثلاً رنگ های متفاوت به آنها بزنیم) سپس در دستگاه مختصات موقعیت اولیه آن ها را ثبت کنیم و اجازه دهیم حرکت کنند می توانیم بردار موقعیت جدید را نیز براساس زمان رسم کنیم.

متغیر اصلی در این حالت نیز زمان است. برای مشخص کردن حالت ذرات داشتن موقعیت مکانی در لحظه صفر هم لازم است (x_0, y_0, z_0)
که این موقعیت مکانی اولیه هم متغیر مستقل دیگری غیر از زمان است

نکته: موقعیت مکانی نهائی متغیر مستقل نیست چون از روی مکان اولیه، زمان و سرعت قابل محاسبه است.

نتیجه: متغیرهای مستقل اصلی
- موقعیت مکانی اولیه ذرات سیال
- زمان

- نگرش اویلری: میدان سیال را به صورت یک میدان برداری فضایی می گیریم و از بیرون به نقطه نقطه فضا در هر لحظه از تعدادی ذرات نگاه می کنیم و مشخصه های آن نقطه از فضا در آن لحظه برای ما مهم است (و نه ذره).

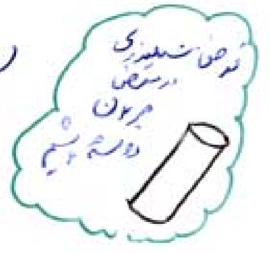
متغیر مستقل در این نگرش
- x, y, z
- t

هستند.

کاربردهای هر یک در سیالات:
- آماری و مولکولی: ما بین واحدهای مولکولی سیال که تک تک آنها رفتارشان برای ما مهم است. در این دیدگاه برای جریان های گازهای رقیق توسعه یافته و معادلات کاربرد دارد اما در حوزه سیالات و گازهای غلیظ نظیر فوق دقیق نیست و کاربردی ندارد
- محیط پیوسته: ما در این روش کاری کنیم که سیال را یک محیط پیوسته در نظر بگیریم. (مثلاً بررسی یک ماده ...)
Continuity

✓ چه موقع فرض پیوستگی معتبر است؟

توضیح: min free path مسیری است که مولکول بدون اینکه تحت تاثیر قرار گیرد از مولکول های اطراف حرکت کند.

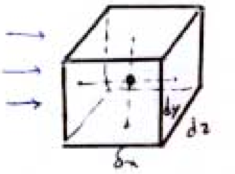


اگر min free path بزرگتر از کوچکترین بعد جسمی که در معرض جریان قرار دارد باشد، حالت پیوستگی نداریم چون جریان فاصله خواهد داشت که در آن مولکول به بدنه (سطح زمین/جسم) برخورد می کند.

اگر min free path کوچکتر از کوچکترین بعد جسمی که در معرض جریان قرار دارد باشد، حالت پیوستگی داریم. چون مولکول ها به بدنه جسم در جریان (سطح زمین) برخورد می کنند.

۲) توضیح در مورد شکل حجم کنترلی

برای استخراج معادلات دیفرانسیل هر جا یک حجم کنترل در نظر می گیریم و برای این حجم کنترل معادلات را می نویسیم



مقادیر روی سطح ها به وسیله بسط تیلور از مرکز بدست می آید. (مقدار موجود در مرکز)

مثلا برای فشار: $P + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\delta x}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\left(\frac{\delta x}{2}\right)^2 + \dots$ (برای وجه سمت راست)

که به وسیله بسط تیلور مقادیر روی شش وجه حاصل می شود

حال می توان تعادل را اعمال می کنیم و سپس حد می گیریم وقتی $\delta x \to 0$، $\delta y \to 0$، $\delta z \to 0$. (یک معادله دیفرانسیل بدست آمده است (E))

راه بهتر است که به جای δx و δy و δz از dx، dy، dz استفاده کنیم و دیگر لازم به حد گیری نیست (چون dx و dy و dz به اندازه‌ی کافی کوچک هستند)

✓ می توان به جای یک حجم کنترل بی نهایت کوچک داشت و معادله‌ی تعادل را توسط انتگرال معادله بدست آوریم و در نهایت یک معادله‌ی انتگرال دیفرانسیلی بدست می آوریم.

نکته مهم: در دو دید، در ... تغییرات هر خاصیتی از سیال نسبت به زمان را مشتق کلی یا مشتق مادی می نامیم و دید مشتق قابل تبدیل به مشتق در دید اویلری است.

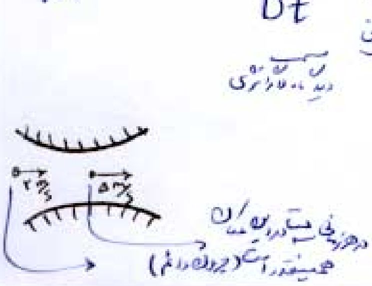
مشتق مادی $\equiv \frac{D\alpha}{Dt}$

$$\underbrace{\frac{D\alpha}{Dt}}_{\text{دید لاگرانژی}} = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial t}}_{\text{مشتق زمانی}} + \underbrace{u_k \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}}_{\text{مشتق مکانی}}}_{\text{دید اویلری}}$$

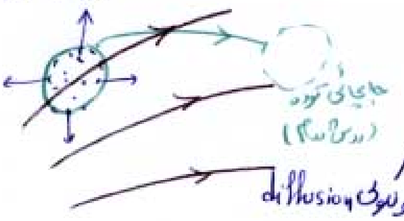
← در جریان steady که همه‌ی جملات مشتق زمانی صفر است (می باشد)

نشان دهیم: در حالت steady state (دائم) در کانال همگرا سرعت مکانی وجود دارد (در هر نقطه سرعت بیشتر از شروع کانال است)

← در حقیقت مشتق زمانی صفر است ولی مشتق مکانی وجود دارد



در ارائه‌ی استخراج معادلات که از روش Control volume (حجم کنترل) استفاده می‌شود، مسأله انتقال یک کمیت در داخل میدان سیال است.



✓ کمیت می‌تواند اسکالر، برداری یا تانسور باشد.

تانسور ← تنش

بردار ← $m\vec{u}$ ← سرعت

اسکالر ← ρ ، ρ ، T ← چگالی، دما

مولکولی diffusion
توده‌ای Convection
مکانیزم‌ها

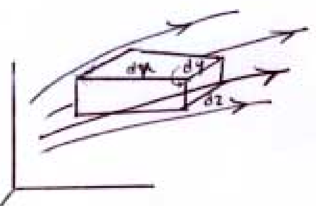
✓ در میدان سیال انتقال با دو مکانیزم قابل توضیح است.

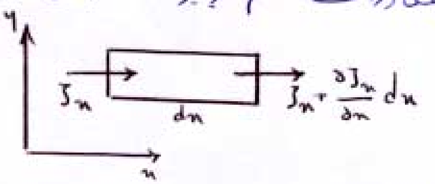
یکی انتقال به وسیله‌ی مولکول‌هاست (مثل گرم کردن بخشی از سیال، و در اثر حرکت خیلی مولکول‌ها، برخورد دیگر انتقال انرژی بالا برای مولکول‌های دیگر اتفاق می‌افتد) (مثل راه رفتن تو در اتاق) (این مکانیزم آرام انجام می‌شود)

مکانیزم دوم جابجایی (Convection) است که سریع رخ می‌دهد و به وسیله‌ی توده‌ی سیال انجام می‌شود (مثل فوران)

در جریان‌ها این دو مکانیزم ممکن است همراه هم (در بخشی از سیال انتقال مولکولی و در بخشی دیگر جابجایی توده‌ای) و یا به صورت منفرد صورت بگیرد. به طور کلی این دو مکانیزم در جریان‌ها در حال رقابت هستند.

فرض کنیم هر دوی این مکانیزم‌ها وجود داشته باشند و باعث تغییر در کمیت‌های میدانی جریان (مثل فشار، دما، تنش و ...) می‌شوند. ما باید بتوانیم اثر این دو مکانیزم را در استخراج معادلات حاکم بر جریان سیال به صورت تفاضلی بیاوریم.





یک المان کوچک فرضی را در میدان سیال در نظر می‌گیریم.

برداری را تعریف می‌کنیم به عنوان بردار فلاکس (J)

که وظیفه‌ی این بردار فلاکس در حقیقت همین دو مکانیزم فوق است (دیفیوژن و کانوکشن)

و از دو بخش فلاکس نفوذی و فلاکس جابجایی تشکیل شده است. معمولاً وظیفه این بردار جابجایی چیزی را جابجا کند هم مثبت (از چپ به راست)

J_c ← Convection

J_D ← Diffusion

اگر مقدار این بردار در سمت چپ J_x باشد، مقدار خروجی این جریان در سمت راست به کمک بسط تیلور قابل محاسبه است. $J_x+\frac{\partial J_x}{\partial x}dx$

(چون خود dx خیلی کوچک است، از نوشتن ادامه‌ی بسط تیلور صرف‌نظر می‌کنیم چون ترم‌های بالاتر dx وجود دارند که مقداری حدود صفر دارند)

دقت شود که ایده ورودی و خروجی منطقی بدان دلیل است چون ما میدان را پیوسته در نظر گرفته‌ایم.

نکته مهم: J_x یک کمیت را وارد این حجم کنترل می‌کند و بسط تیلور آن را از سمت دیگر خارج می‌کند.

$$\text{net flux}=J_x+\frac{\partial J_x}{\partial x}dx-J_x=\frac{\partial J_x}{\partial x}dx \xrightarrow{\text{فلاکس در واحد سطح}} \boxed{\text{net flux}=\frac{\partial J_x}{\partial x}dx\,dy\,dz} \quad \mathrm{I}$$

یعنی می‌دهیم ← حجم (سطح در بردار)

گفتیم J شامل دو بخش است (convection , diffusion)

φ همان کمیتی که در حال انتقال است φ باشد (φ می‌تواند جرم، مومنتوم، حتی ... باشد)

اگر فرض کنیم که داریم دیفیوژن باشد ⟸

Diff ∝ گرادیان کمیت مورد نظر

نفوذ در امتداد افت کمیت است

$$J_{Dx} \propto \frac{D\varphi}{Dx} \xRightarrow{1} \boxed{J_{Dx} = -\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

منفی را می‌گذاریم تا حاصل عبارت مثبت شود

ضریب تناسب به نام گاما — ضریب نفوذ (ضریب تناسب)

[در حالت حرارتی $\Gamma = k$ است
φ دما است]

اگر در جهت x، φ را حمل می‌کنند ذره‌های سیال می‌باشد (مثلاً جرم سیال!) ← در جهت کانوکشن

در حقیقت مولفه‌ی ρu در حال حمل φ است. (ذرات سیال با مشخصه ρu در حال حرکت است) ← $(\rho u)\varphi$

$$\boxed{J_{cx} = (\rho u)\varphi} \quad 2$$

$$1 , 2 \Rightarrow \boxed{J_x = (\rho u)\varphi - \Gamma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)} \quad 3$$

این معادله نشان می‌دهد کمیت φ به دو صورت پخشی و همرفتی از حجم کنترل ما خارج یا به حجم کنترل ما وارد شود.

φ کوچک

$$\boxed{\left[\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}\right] dx\,dy\,dz} \quad \text{II}$$

همچنین φ می‌تواند داخل حجم کنترل ذخیره شود.

مقدار φ ذخیره شده در حجم کنترل = تغییرات با زمان $\frac{d}{dt}$ (جرم واحد حجم ρ × مقدار کمیت در واحد جرم φ) × حجم المان حجم کنترل $dx\,dy\,dz$

$$\boxed{S\,dx\,dy\,dz} \quad \text{III}$$

همچنین φ می‌تواند تولید شود یا نابود گردد. (مثل واکنش‌های هسته‌ای)
(S تولید φ در واحد حجم است)

به ① و I نداریم خودش یک بحث دیگری دارد انجام یک مسئله دیگر می‌شود
این معادله مرتبه‌ی ۲ است

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}}_{\text{ذخیره‌ی φ داخل حجم کنترل}} + \underbrace{\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}}_{\text{ورود و خروج کمیت φ را از مرزها نشان می‌دهد}} = \underbrace{S}_{\text{تولید φ (منبع یا سورس)}}} \quad \text{III , II , I}$$

(دقت شود مشتق آن‌ها مد نظر ماست)

این معادله نشان می‌دهد تغییرات φ در داخل c.v برابر است با تبادلات با محیط بیرون c.v به همراه تولید φ در داخل حجم کنترل.

φ ← مومنتوم یا انرژی یا جرم

$$\frac{\Phi}{m} = c_\varphi \qquad \begin{cases} \Phi = m \rightarrow c_\varphi = 1 \\ \Phi = E \rightarrow c_\varphi = e \\ \Phi = V \rightarrow \varphi = v(u,v,w) \end{cases}$$

φ کوچک

معادله II — معادله ③

$$\xrightarrow[\text{بقای جرم}]{\text{if } \Phi = m} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u - 0) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v - 0) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w - 0) = 0$$

طبق قانون بقای جرم $S = 0$ چون تولید و نابودی جرم نداریم.

دیدیم که شکل کلی معادلات بقا به صورت زیر است.

$$J_x \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x}dx$$

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S$$

$$J_x = (\rho u)\varphi - \Gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

$$J_y = (\rho v)\varphi - \Gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

$$J_z = (\rho w)\varphi - \Gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}} + \boxed{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\varphi) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\varphi) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\varphi) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)} = \boxed{S}$$

ترم وابسته به زمان معمولاً خطی است. ذخیره ی φ داخل حجم کنترل را نشان می دهد.

وابسته به میدان سرعت که φ را به صورت کانوکشن جابجا می کند و بستگی به میدان سرعت و دانسیته دارد و می تواند غیرخطی باشد.

انتقال با مکانیزم نفوذ مولکولی را نشان می دهد. دقت شود به صورت مشتق مرتبه ۲ ظاهر شده است.

منبع تولید φ (ترم چشمه)

✓ همیشه به یاد داشته باشیم معادلات بقا به ۴ بخش های ذخیره φ، توزیع مرکزی φ (توزیع پخشی φ) و توزیع کانوکشن φ و ترم تولید φ را دارند.

S — J_c — J_D — ترم زمانی دارد

unsteady Term: ترم غیردائمی

Convection Term: ترم جابجایی

Diffusion Term: ترم نفوذ → تحت تاثیر ضریب Γ است → ضریب نفوذ: (D) ضریب نفوذ جرم، (μ) ضریب نفوذ مومنتوم، (K) ضریب نفوذ حرارتی

Source Term: ترم چشمه

دقت شود بدون ترم است

Φ = کمیت

$\varphi = \frac{\Phi}{m}$

→ mass Continuity $\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$ — معادله پیوستگی یا بقای جرم

→ Energy Continuity $\quad \frac{E}{m} = e \rightarrow e = c_pT$ حالت ایده آل برای معادله بقا

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uT) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vT) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{c_p}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{S}{c_p}$$

معادله انرژی در یک سیستم دائمی دو بعدی و با دانسیته ثابت

می توانیم ترم های هستند که با آن ها را متناسب با کاربردمان ساده کنیم

→ momentum Continuity $\quad \frac{\vec{V}}{m} = v, u, w$ در جهات مختلف

معادله مومنتوم خیلی مهم است

ترم کانوکشن — ترم دیفیوژن

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \boxed{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho wu)} = \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)} - \frac{\partial p}{\partial x} + \boxed{V_x + B_x + F_x}$$

ترم چشمه — ترم هایی که در ترم های دیگر نمی گنجند

مومنتوم حجم کنترل را دارد

ترم جابجایی مومنتوم در اثر ρu (ρw یا ρv) (انتقال مومنتوم از یک سطح به سطح دیگر اجزای خاص)

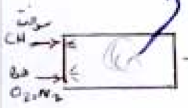
تغییرات فشار در جهت x (خیلی مهم)

V_x: نیروهای ویسکوز — viscose term

B_x: Body Force → مثل وزن

F_x: distributed resistance → در شرایط خاص مثلاً در محیط متخلخل

میزان تولید در هر لحظه داشته باشیم



محصولات احتراق: CO_2 → یک جزء، H_2O، CO، OH، NO_x، O_2، H_2

جزء: مولی → $Y_i = \frac{n_i}{N_t} = \frac{\text{تعداد مول جزء}}{\text{تعداد کل مول}}$ ؛ جرمی → $m_l = \frac{m_i}{m_t}$

Conservation of chemical species

برای معادلات بقا در محیطی که واکنش شیمیایی داریم.

✓ معادله بقا برای یک سیستم با N جزء شیمیایی: N-1 معادله بقا برای اجزا + معادله بقای کلی

m_l = mass fraction = (mass of species l)/(mass of mixture)

R_l = rate of generation of species l by chemical reaction

جزء جرمی هر جزء و در سینتیک احتراق به دست می آید (به عنوان input داریم)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u m_l) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v m_l) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w m_l) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial m_l}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial m_l}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial m_l}{\partial z}\right) + R_l$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_l) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i m_l) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma\frac{\partial m_l}{\partial x_i}\right) + R_l$$

نکته: در معادله‌ی بقا، ترمی که قابل بیان به فرم ترم زمانی، کانوکشن و دیفیوژن نباشد را می‌توان به عنوان بخش چشمه (منبع تولیدی) در نظر گرفت (مثلاً در معادله‌ی مومنتوم همه‌ی قبیل ترم‌های V_x و B_x و F_x همین گونه هستند)

بیان‌های مختلف نوشتن بقا:

به دو فرم برداری و تنسوری می‌توان بیان کرد.

برداری $\Longrightarrow$ $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \overbrace{\operatorname{div}(\rho u\varphi)}^{\text{ترم جابجایی}} = \overbrace{\operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad}\varphi)}^{\text{ترم دیفیوژن}} + S$$

div تعریف $\rightarrow$ $\operatorname{div} O = \frac{\partial O}{\partial x} i + \frac{\partial O}{\partial y} j + \frac{\partial O}{\partial z} k$

grad تعریف $\rightarrow$ $\operatorname{grad} O = \frac{\partial O}{\partial x} + \frac{\partial O}{\partial y} + \frac{\partial O}{\partial z}$

نکته: شکل برداری معادله بقا مستقل از دستگاه است.

فقط باید توجه داشت div و grad با توجه به تعریف مخصوص به هر دستگاه باید اعمال شوند.

تنسوری $\Longrightarrow$ $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \varphi)}_{\text{شکل ترم جابجایی}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)}_{\text{شکل ترم دیفیوژن}} + S$$

فرم تنسوری بر اساس اندیس‌های تکراری است که باید به روی آنها جمع زد.

مثال) Continuity equation
معادله جرم

برداری $\longrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \xrightarrow{\text{برای سیال تراکم ناپذیر}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) = 0 \longrightarrow \operatorname{div}\vec{u} = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$

تنسوری $\longrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$

یعنی چه؟ $\longleftarrow$ net efflux جرم از سطح حجم است (جمع ورودی‌ها و خروجی‌ها صفر است) در حقیقت شدت تغییرات جرم در جهت مختلف صفر است.

✓ دیورژانس روی هر چیزی یعنی net efflux روی آن.

نکات مهم در معادلات نفوذ (معادله‌ی جنرال آن)

- متغیر وابسته φ می‌تواند یک مولفه سرعت، دما، معادله انرژی یا غلظت جزئی یک معادله شیمیایی یا نرخ استهلاک یک معادله انرژی در جریان توربولانس و ... باشد.

- همراستا با هر φ متناظراً نیاز به انتخاب صحیح از Γ (ضریب نفوذ) و S (ترم منبع) و شرایط مرزی (همراه شرایط اولیه) است.

تعداد شرایط مرزی در حالت کلی: بزرگ‌ترین مرتبه ۲ است در ۳ جهت ⇒ $\underline{2\times3}$ شرایط مرزی و یک شرط اولیه برای شرط‌ها عدد هم می‌خواهم در مجموع ۷=۶+۱ شرط مرزی (همراه اولیه) می‌خواهیم)

- معادله جنرال ما را قادر می‌کند که برنامه‌های با صورت جنرال بنویسیم بطوری که این برنامه‌ی جنرال برای تعداد زیادی از مسائل فیزیکی قابل استفاده باشد.

درباره‌ی ضریب نفوذ (Γ)

✓ ضریب نفوذ در معادله‌ی مومنتوم با μ در معادله انرژی با K و در معادله جرم با D نشان داده می‌شود.

✓ Γ یک خاصیت عمومی است از خواص سیال که همراه گرادیان آن کمیت در هر جهت مقدار و شدت آن کمیت را در امتداد خاص بصورت فلاکس دیفیوژنی مشخص می‌کند. (مثل تنش برشی یا هدایت حرارتی)

$q_n = \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ < نوعی بیانی است که نفوذ یک پدیده‌ی گرادیانی است >

✓ برای جریان‌های توربولانس مقادیر لامینار Γ و μ باید با مقادیر متناظر جایگزین شود.
مثلاً لزجت (μ) خاصیتی از سیال است که در آزمایشگاه قابل اندازه‌گیری است و مستقل از سرعت و ... است.
در جریان لامینار مقدار μ عموماً یک مقدار و اندازه‌گیری شده و مستقل است. $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n}$
در جریان توربولانس مکانیزم‌های دیگری هم وارد پدیده‌ی انتقال به وسیله‌ی نفوذ می‌شود. در حقیقت ضریب نفوذ عوض می‌شود و Γ شکل‌ها می‌گیرد.

$\Gamma_{توربولانسی} = \Gamma + \Gamma_t$ ← مشابه‌ی μ در توربولانس داریم $\mu = \mu_{laminar} + \mu_{turbulent}$

مربوط به توربولانس است — مربوط به جنس و اساس خاصیت سیال

← eddy diffusivity

← خاصیت سیال

← خاصیت سیال نیست و به خاطر توربولانسی شدن جریان به وجود می‌آید

✓ Γ ممکن است در میدان سیال ثابت نبوده و به موقعیت مکانی، سرعت و دما وابسته باشد.

درباره‌ی منبع چشمه (S)

✓ برای برخی پدیده‌ها لحاظ می‌شود مثل تولید حرارت درون یک جسم درون لوله و واکنش‌ها هسته‌ای که تولید انرژی خواهیم داشت یا در محفظه‌ی احتراق که ممکن است واکنش گرمازا یا گرماگیر باشد.
یا بصورت تولید یا نابودی (مصرف یا تبدیل) اجزاء شیمیایی باشد. (نرخ تولید یا تبدیل در واحد حجم بررسی می‌شود)

✓ S می‌تواند محل بیان (محل درِ جن!) برای همه‌ی ترم‌هایی که قابل بیان توسط ترم‌های دیگر نیستند باشد.
این انعطاف‌پذیری درک به ما امکان می‌دهد که خیلی از پدیده‌ها را با فرم معادلات حاکم جریان مدل‌سازی کنیم.

جریان توربولنس

اغلب جریان‌هایی که با آن سروکار داریم توربولنس هستند، که دارای مشخصه‌های وسیعی از طول‌ها و زمان‌ها هستند

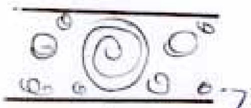
ادی: توده‌ی سیالی

جریان آشفته خصوصیات زیر را دارد

(۱) وجود اسکیل‌های زمانی و مکانی زیاد.
اسکیل بزرگ
میانی
کوچک

(۲) همه‌ی جریان‌های توربولانی غیردائمی و غیرتکرارپذیر هستند و ماهیت آماری دارند.

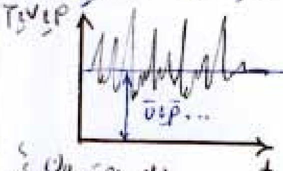
✓ بزرگ‌ترین اسکیل‌هایی که ممکن است بوجود آیند به هندسه جریان کاملاً وابسته هستند ولی کوچک‌ترین اسکیل‌ها به هندسه وابسته نیستند و یونیورسال (رفتار یکسان) هستند.
مثلاً در یک لوله بزرگ‌ترین ادی که می‌تواند بوجود آید به اندازه‌ی قطر لوله وابسته است (برخلاف کوچک‌ترین اسکیل‌ها)



کوچک‌ترین گردابه‌ها کنار دیوار تبدیل به انرژی حرارتی می‌شوند.

کلاسیک ← حل مستقیم معادلات ← تشکیل یک شبکه محاسباتی ریز تا با آن ادی‌ها را بگیریم ممکن است زمان بر و پرهزینه باشد، غیرممکن است
کلاسیک ← مدل‌سازی ← معادلات را با تغییراتی و اعمال فرضیات مدل‌سازی می‌کنیم، مثلاً به استوکس حل می‌کنیم.
یکی از روش‌ها متوسط‌گیری زمانی است
یکی از روش‌ها متوسط‌گیری مکانی است
یکی از روش‌ها فیلتر کردن است

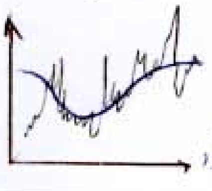
توضیح ← برای متوسط‌گیری زمانی: کمیت‌ها شامل دو بخش متوسط و نوسانی هستند، برای جریان توربولانس که توسط دو جمله بیان می‌شوند (یک مقدار میانگین و یک مقدار نوسانی) که این مقدار میانگین با زمان تغییر نمی‌کند و مقدار متوسط نوسان‌ها صفر است.
که خود مقدار متوسط وابسته به زمان نیست



$U(t) = \bar{U} + U'(t)$

ترم حلی و متوسط — ترم اختلالی رینولدز که جایی که گاهی شبیه تنش است (توسط مدل‌سازی در معادلات ظاهر می‌شوند)

اگر در جریان توربولان غیردائمی باشد



متوسط ما خود تابعی از زمان خواهد بود و در حال تغییرات که در سطح مربوطه خود اثر دارد

– در معادلات متوسط‌گیری شده ترم‌هایی وارد می‌شوند که شبیه تنش هستند به آن‌ها تنش توربولانی گویند که با ترتیب صحیح S داخل فرمول گنجانده می‌شوند.
– در مدل‌سازی توربولانس نمی‌توان مدل‌های یونیورسال ارائه کرد. یعنی مدل‌هایی که در همه‌ی شرایط قابل پیاده‌سازی باشند.
– ضرایبی وجود دارند که تنها از راه آزمایش و تست قابل حصول هستند

شبیه سازی یک جریان توربولان

یکی از مدل های قابل پیاده سازی برای جریان توربولانس مدل $k-\varepsilon$ است.

The $k-\varepsilon$ model

$k \equiv$ kinetic energy of turbulence → در جریان توربولانس می توان یک انرژی جنبشی توربولانسی تعریف کرد که برابر است با مجموع ترم های انتقال مومنتوم

$\varepsilon \equiv$ its dissipation rate → که بخش انرژی توربولانس هر ثانیه در حال مستهلک شدن توسط ادی های کوچک استهلاکی است.

(که از مستهلک شدن انرژی به وسیله حرکت ...)

$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$ → عامل اصطکاک و مشخصه

با دانستن این دو مشخصه می توان جریان توربولانسی مورد نظر را شبیه سازی کرد و از این ترم ها کمک گرفت. k, ε

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i k)}_{\text{ترم جابجایی}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)}_{\text{ترم دیفیوژن}} + \underbrace{P - \rho\varepsilon}_{\text{Production Term}} \rightarrow \text{منبع}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right) + (C_1 P - C_2 \rho \varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)$$

$P \equiv$ generation rate of $k = \mu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$

$C_\mu = 0.09$ $\quad C_1 = 1.44$

$\sigma_k = 1.0$ $\quad C_2 = 1.92$

$\sigma_\varepsilon = 1.3$

مدل سازی احتراق

روش های حل مسئله احتراق:
- ترمودینامیکی: که ساده ترین فرض است که هدف آن است تعادل را بین محصول و ... نشان می دهد
- تعادل: مدل پیچیده با فرض وقوع تعادل شیمیایی در نقطه احتراق
- وابسته به سینتیک احتراق → بر اساس نرخ آزاد شدن انرژی است

تنها مدلی است که نرخ زمانی تولید محصول و انرژی را می دهد.

$$R_{fu} = -F \rho^2 m_{fu} m_{ox} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)$$

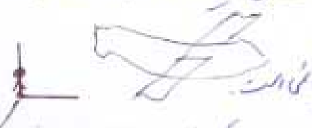
F → Pre exponential factor

E → activation energy

R → universal gas Constant

✓ این نوع جریانی که فقط با یک معادله بیان می شود جریان پتانسیل است. سایر جریان ها با دستگاه معادلات سروکار داریم.

نکته مهم: با انتخاب صحیح مختصات می توان مسائل غیر دائمی را به دائمی تبدیل کرد.



حل ادوکشن یکی بر روی مختصات ...

این معادلات برای سرعت هواپیما غیر دائمی است.

اگر مختصات را روی هواپیما استفاده کنیم جریان های اطراف هواپیما از غیر دائمی به دائمی تبدیل می شود.

انواع متغیرها — وابسته / مستقل:
- مکانی (x): 1D، 2D، 3D
- زمانی (t): دائمی، غیر دائمی

✓ اولین قدم در طراحی هواپیما به دست آوردن توزیع سرعت و فشار است.

دیدگاه مختصات { one way / two way

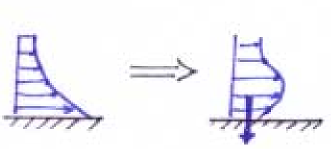
دیدگاه مختصاتی به ما کمک می کند قبل از حل هر معادله ای آن را ساده کنیم.

✓ می دانیم S (منبع) قابلیت جمع کردن تمام ترم های غیر مشابه با ترم های غیر دائمی، جابجایی، دیفیوژن را در خود دارد.

مثلاً در حالت کلی در معادله ی انرژی ترم هایی ظاهر می شوند که مشتقات مرتبه ی اول به توان ۲ هستند.

مثل ترم $\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)^2\right]$ که ترم بخش اصطکاکی هستند، و در سیالات خیلی بالا ظاهر می شود (ماخ بالا)

به صورت گرما ظاهر می شود و روی پروفیل دمائی تغییر شیب ایجاد می کند.



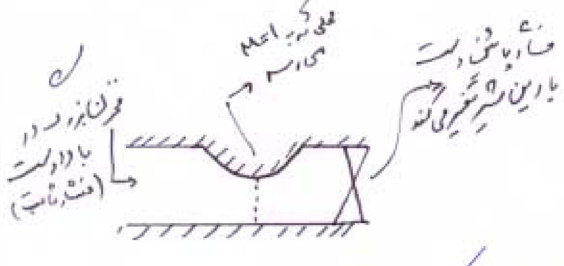
و بخشی از انرژی سیال به دیواره منتقل می شود.

ما این ترم را در S دفن می کنیم.

→ گاهی اوقات این ترم باعث غلبه ی ترم چشمه نسبت به بقیه ترم ها می شود. (بعداً به این قضیه می پردازیم)

مختصات یک راهه

اگر مختصری ما به گونه ای باشد که جهت انتقال اطلاعات در راستای یک مختصه خاص (از بالادست به پائین دست) باشد، مختصه یک رفتار one way خواهد داشت.



مثلاً در نازل سوپرسونیک:

نازل یک جریان بسیار بزرگ فعال است و فشار ثابت است.

ما در پایین دست شیری داریم که فشار پائین دست را تغییر می دهد.

اگر شیر ابتدا بسته باشد، عملاً جریانی نداریم. به محض باز کردن شیر، تجمع مولکول ها کاهش می یابد و افت فشار ایجاد می شود. در این صورت سیال ضعیف شروع به حرکت می کند و تغییرات فشار را به سیال بالادست منتقل می کند.

در حقیقت مولکول های بالادست حس می کنند مقاومت کمتری مقابل آنهاست و جریان جاری می شود.

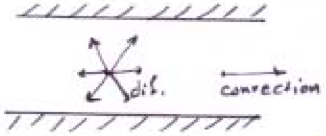
اگر شیر را بیشتر باز کنیم، باز هم این اتفاق می افتد و جریان بالادست خود را با مقاومت مقابل خودش تنظیم می کند. اگر این کار را ادامه دهیم، سرعت جریان در کوچکترین مقطع جریان به مقداری می رسد که ماخ در آن برابر ۱ می شود ($M=1$) و از این به بعد تغییر فشار در پائین دست روی بالادست تأثیر نخواهد داشت.

در حقیقت مولکول های بالادست اطلاعی از مولکول های پائین دست نخواهند داشت.

تحت شرایطی می توانیم جریان را سوپرسونیک کنیم، در این حالت هیچ اطلاعاتی قابل انتقال به بالادست نخواهد بود و همه اطلاعات از بالادست به پائین دست منتقل می شود.

رفتار جریان ما one way است (در راستای مختصه ی مربوطه)

✓ اگر از دیدگاه دیفیوژن یا کانوکشن به قضیه one way و Two way نگاه کنیم، می‌بینیم که دیفیوژن پدیده‌ای است که در همه‌ی جهات می‌تواند انتقال اطلاعات داشته باشد.



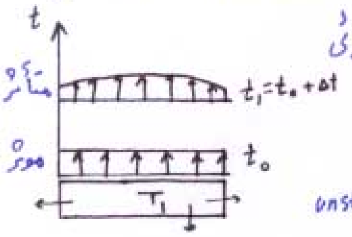
مثال: فرض کنید یک لوله جریان سیال غیرقابل تراکم با یک Re متوسط داشته باشیم. انتقال اطلاعات در همه جهات صورت می‌گیرد در صورتی که از دیدگاه دیفیوژن بررسی شود. از طریق کانوکشن انتقال اطلاعات فقط از بالادست به پائین دست منتقل می‌شود. با افزایش Re میزان قدرت نسبی کانوکشن بسیار بیشتر از قدرت دیفیوژن خواهد شد. و در عمل دیفیوژن بی‌تاثیر خواهد شد.

توجه: یکی از پیچیدگی‌های موجود در حل عددی همین است که رفتار معادله‌ها از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر ممکن است عوض شود. یعنی یک منطقه ممکن است گاهی رفتار one way داشته باشد و گاهی Two way. در مثال فوق اگر قدرت کانوکشن در حدی بود که نفوذ (دیفیوژن) به بالادست داشتیم، چون هم از بالادست به پائین دست و هم از پائین دست به بالادست انتقال اطلاعات داریم پس رفتار Two way خواهد بود.

نکته: اهمیت این رفتارها در روشی است که مسائل را حل می‌کند.

مثال: heat conduction در داخل یک لوله (یا نفوذ) در همه‌ی جهات اطلاعات (درجه حرارت) را منتقل می‌کند.

نکته: مختصات زمان چگونه است؟ زمان همیشه one way است چون هیچوقت زمان‌ها بر روی زمان‌های قبل تاثیرگذار نیستند.



مثلاً جسمی را از داخل کوره بیرون بیاوریم که دمای آن از محیط اطراف بیشتر باشد. تغییرات دمای به طوری است که دمای زمان‌های بعد متاثر از دمای زمان قبل هستند.

این موضوع برای ما مهم است چون استراتژی حل را مشخص می‌کند. یعنی در مسائل unsteady ما از زمان‌های قبلی استفاده می‌کنیم. (استراتژی marching)

یعنی ما زمان قبل را داریم و یک Δt اضافه و توزیع دما را بدست می‌آوریم.

توجه: marching به ما کمک می‌کند که وابستگی زمانی به تعداد کمتری نقطه وابسته باشد ولی در هر Δt باید کل توزیع دما در داخل لوله را بدست آورد.

✓ جریان لایه مرزی، معادله one way داریم چون از بالادست به پایین دست جریان داریم.

✓ دسته‌بندی پدیده‌ها از دید فیزیکی ← نفوذ از قدرت بالایی برخوردار است.

در این مسائل هر نقطه تحت تأثیر تمام نقاط مرزی می‌تواند باشد
در شکل روبرو با تغییر در هر نقطه‌ی مرزی، تغییر با یک تأخیر کمی
خود را به تمام نقاط دیگر می‌رساند.

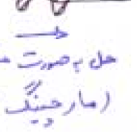
به این نوع مسائل Boundry value Problem می‌گویند.
(یعنی نقاط مرزی روی نقاط داخلی تأثیر می‌گذارند)

مثال) اگر شکستگی بین دو دما داشته باشیم در حل به صورت Smooth
خواهد شد که جزء مسائل Boundry Value Problem خواهد بود. (گرادیان در داخل
مرز به صورت نرم خواهد بود)

← مسائل متداول دیگر: به این نوع مسائل initial value Problem
می‌گویند. مثل همه‌ی مسائل unsteady. (به صورت one way)
یعنی همه‌ی نقاط مرزی اثر روی متغیرهای وابسته در هر نقطه تأثیر نداشته
و انتقال اطلاعات در یک جهت صورت می‌گیرد.

انواع مسائل دیفرانسیل مرتبه ۲:
- سهموی Parabolic ← مسائل one way طبیعت سهموی دارند (مثل جریان‌های موشک)
- بیضوی elliptic ← مسائل Two way
- هذلولی hyperbolic ← به دسته‌ی فوق نیستند

اگر جت دارای گردابه و در جهت x باشد
در نظر بگیریم طبیعت one way
است و طبیعت سهموی است.

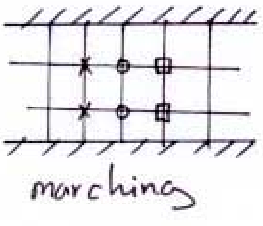


حل به صورت مقطع به مقطع
(مارچینگ)

همه‌ی مسائل
Boundry value problem
به صورت بیضوی هستند.
مثل مسائل نفوذ

می‌توانند یک رفتار one way
داشته باشند نه تنها
در یک راستای مختصات اصلی
بلکه در یک راستای خاص.

marching چیست؟



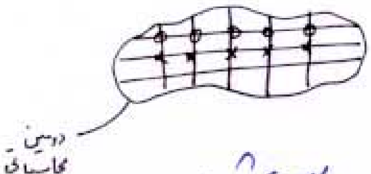
فرض کنانی داریم که یک جریان قوی از چپ به راست درون آن در حرکت است.

اطلاعات ورودی را می‌دانیم (توزیع سرعت، فشار و ....)

اگر منطقه ما one way باشد با استفاده از این مقطع ورودی، اطلاعات مقاطع بعدی قابل حصول است. (استفاده از حل مراحل قبلی برای حل مرحله بعد)

وظیفه متد عددی چیست؟

۱) توجه اصلی روی مقادیر متغیرهای وابسته (دما، فشار، سرعت) در تعداد مشخصی از نقاط در یک دامین.
(یعنی به جای تمرکز روی همه‌ی نقاط روی نقاط خاص (computational domain) تمرکز می‌کنیم و مقادیر متغیرهای وابسته را فقط در همین نقاط جستجو می‌کنیم)

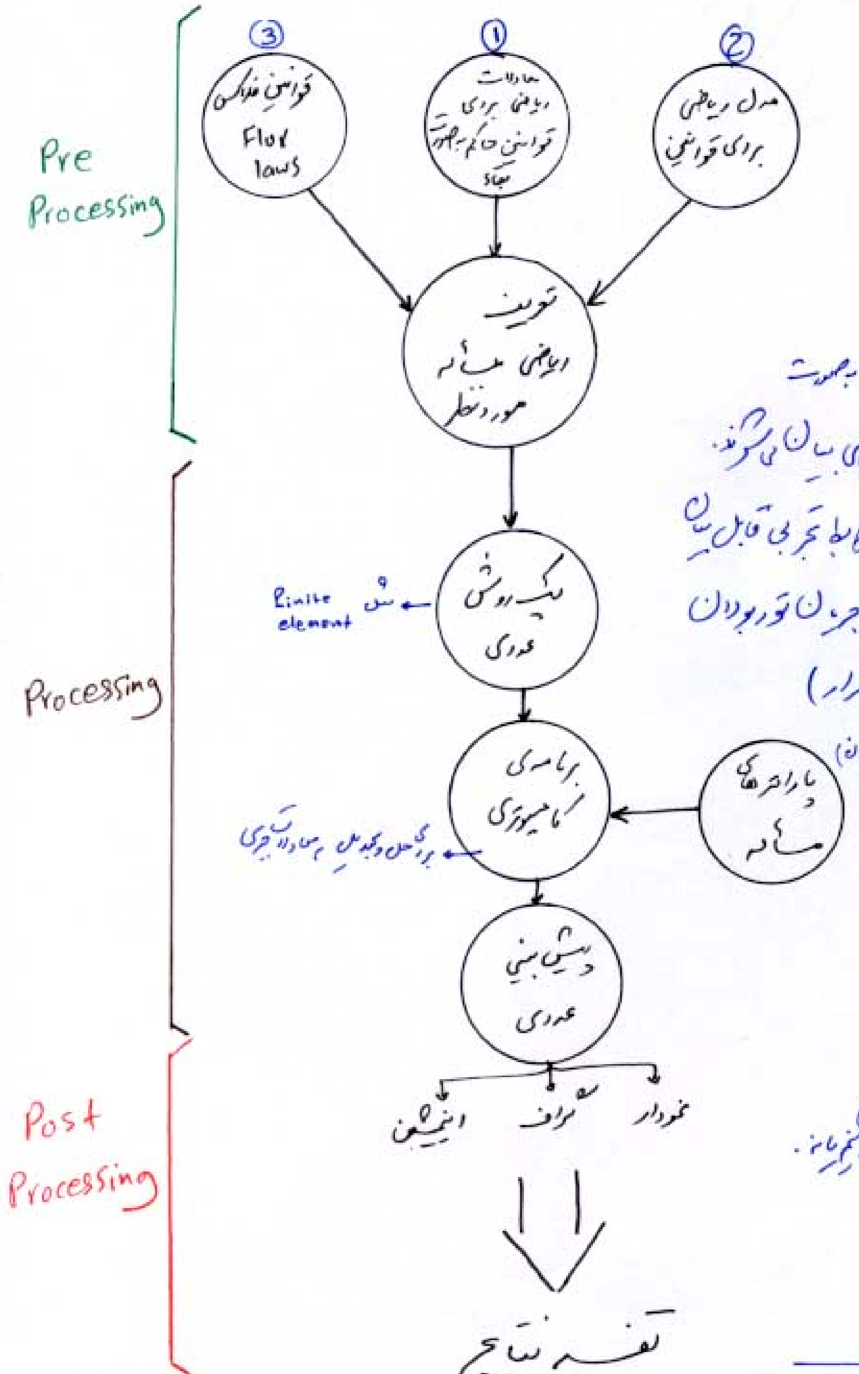


مثلاً اگر یک جریان دو بعدی همراه با انتقال حرارت برای حل انتخاب کردیم باید در هر نقطه u و v (دو مؤلفه سرعت) و P و ρ و T را داشته باشیم و بدست آوریم.

۲) تلاش برای نوشتن یک دسته معادلات جبری:

$$\text{PDE} \xrightarrow[\text{عددی}]{\text{روش‌های}} \text{معادلات جبری}$$

۳) یک الگوریتم برای حل معادله نوشته شده ارائه می‌کنیم.



اجزاء یک پیش بینی عددی چیست؟

mathematical model ⇐ ③ ، ② ، ①

① : بیان انتقال جرم، مومنتوم، تولید جرم، واکنش شیمیائی و ... به کمک معادلات بقا

② : معادلاتی که نیاز زمند مدل هستند و نتوان به صورت فیزیکی روابطی ساخت. به صورت مدل ریاضی بیان می‌شوند. این مدل ها به صورت یک سری فرضیات و روابط تجربی قابل بیان هستند. (مثل مدلی که برای تشعشع بار یا جریان توربولان یا خشک شدن یک ماده‌ی آبدوست یا آب فرار)

③ : مش فلاکس مومنتوم ← بخاطر وجود نیروها و عامل حرکت

نیروی حجمی (گرانش) نیروی سطحی

نیروهای سطحی قابل ارتباط با گرادیان سرعت هستند:

$\sigma_i = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$

نیروهای سطحی برای سیالات نیوتنی قابل ارتباط با گرادیان سرعت هستند

یا فلاکس حرارتی داریم که باید دید آیا از قانون فیک تبعیت می‌کند یا نه.

$q \propto \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow q = -k \frac{\partial T}{\partial x}$

یعنی فلاکس را با گرادیان متناسب کردیم.

✓ لزوماً هر فلاکسی اینگونه نیست

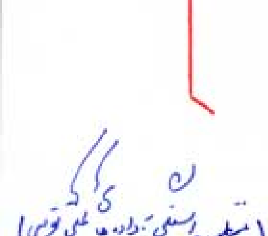
نکته: مسأله‌ای خوش رفتار است (well-posed) که سه شرط داشته باشد

۱) جواب داشته باشد ۲) جواب یکتا باشد ۳) جواب به صورت پیوسته تابع مقادیر اولیه یا مرزی باشد (مستقل و وابستگی به داده‌های مسئله توابع)

Discretization equation چیست؟ مقادیر φ را به مقدار های φ در نقاط اطراف تبدیل می‌کند. (φ هر متغیری مثل دما، فشار و ... است)

یک معادله دارای دیفرانسیل لول را در نظر بگیرید. طبیعت معادله بیضوی است و Two way است.

برای حل یک دستگاه، معادلات چیزی نیاز است که یک نقطه را به نقاط اطراف مرتبط کند.



$$\varphi_{ij} = f(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j+1}, \varphi_{i-1,j}, \varphi_{i+1,j})$$

. . . . برای نقاط داخلی

✓ چند نقطه و نقطه لازم است؟ بعداً گفته می‌شود

✓ باید معادلات جبری حاصل به گونه‌ای باشند که حاوی اطلاعات فیزیکی در معادلات دیفرانسیل را در دستگاه حفظ کنند.

✓ با افزایش تعداد نقاط حل به حل دقیق معادلات دیفرانسیل میل می‌کند

نکته مهم: دستگاه‌ها منحصر به فرد نیست ← چون در تبدیل PDE به معادلات جبری به توابعی نیاز داریم که انتخاب آن‌ها برای هر کسی متفاوت است. اما همه‌ی این دستگاه‌ها باید نتیجه جواب مشابه به ما بدهند.

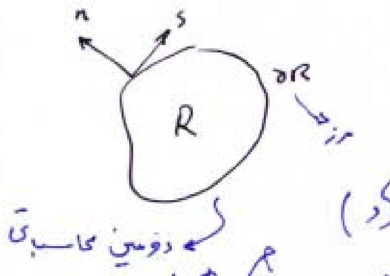
✓ در حل و محاسبه‌ی well posed اگر شرایط مرزی بصورت مشتقات تابع مورد نظر باشد در این حال این شرایط در حل عددی تقریب‌هایی وارد می‌شود که درصورت عدم ارضا شرایط مطرح شده حل دچار مشکلاتی خواهد شد.

✓ الگوریتم محاسباتی که برای حل مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرد باید پایدار باشد.

بنابراین برای برخورداری از یک محاسبات خوش رفتار (well-posed) باید یک حداقل شرایطی وجود داشته باشد که از جمله:

- خوش رفتار بودن PDE و اطلاعات اضافی
- خوش رفتار بودن الگوریتم محاسباتی (پایداری)

شرایط مرزی



ما اطلاعات را از طریق شبکه‌بندی با رشد حل عددی گسترش می‌دهیم به مقدار حل.
فرقی نمی‌کند که مقدار Boundry value داشته باشیم (همه‌ی اطلاعات با هم وارد محاسبات شوند)
یا از نوع marching Problem باشد (از یک مرز شروع می‌کنیم و محاسبات را مرحله به مرحله انجام می‌دهیم)

پس دو نکته زیر مهم است:

۱) تشخیص شرایط مرزی صحیح ۲) implement کردن شرایط مرزی به داخل حل

انواع شرایط مرزی:

۱) مقدار تابع روی مرز مشخص باشد (شرایط دیریکله) $u=f$ on ∂R
مثل دمای ثابت در دیواره‌ی یک بویلر

۲) مشتق تابع در مرز مشخص باشد (شرایط نویمن) $\frac{\partial u}{\partial n}=f$ on ∂R یا $\frac{\partial u}{\partial s}=f$ on ∂R
مثل انتقال حرارت که بخشی از مرز عایق باشد $\frac{\partial T}{\partial n}=0$ یا [illegible] حرارتی مشخص داشته باشیم.

۳) مخلوطی از دو نوع اول (mixed or Robin Condition) $\frac{\partial u}{\partial n}+ku=f\ ,\ k>0$ on ∂R

✓ در مسائل با شرایط جریان غیرلزج (مثل جریان پتانسیل) شرایط نویمن داریم. در جریان انتقال حرارت معمولاً شرایط mixed وجود دارد.

توجه: از نظر محاسباتی اگر تابع f به‌صورت تحلیلی در اختیار باشد شرایط دیریکله به‌صورت دقیق قابل اعمال است در طرف دیگر خطا در اعمال شرایط نویمن و رابین در یک حل عددی بروز پیدا کرده و می‌تواند مشکلاتی به همراه داشته باشد.

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای (PDE)

معادلات حاکم بر جریان سیال به صورت PDE های مشتمل بر مشتقات اول و دوم هستند. در میان مشتق اول در زمان، مشتق زمانی خطی و مشتق مکانی و غالباً غیرخطی هستند. همچنین جز برای حالت خاص (جریان پتانسیل) سیستم معادلات حاکم به جای یک معادله تنها مطرح می‌باشد.

برای معادلات PDE خطی مرتبه‌ی ۲ در دو بعد مستقل یک دسته‌بندی ساده به شکل زیر امکان‌پذیر است.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fx+G=0$$

✓ A و B و C و D و E و F و G ضرائب ثابت هستند

$$\begin{cases} B^2-4AC<0 \longrightarrow \text{معادله رفتار بیضوی دارد} \\ B^2-4AC=0 \longrightarrow \text{معادله رفتار سهموی دارد} \\ B^2-4AC>0 \longrightarrow \text{معادله رفتار هذلولوی دارد} \end{cases}$$

مثلاً برای یک جریان تراکم‌پذیر دوبعدی حول یک جسم نازک:

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

$$\begin{cases} M_\infty<1 \rightarrow ell \\ M_\infty>1 \rightarrow Hyp \end{cases}$$

یعنی برای حل میدان جریان باید معادلات را به صورت دستگاه خطی نوشت، هم که هر نقطه به نقاط اطرافش متصل شود و نقاط دور هم تأثیرگذار هستند.

حل: به روش مشخصه‌ها و عددی در نام می‌شود

مثلاً برای جریان لزج غیرقابل تراکم، دائمی و دوبعدی و معادلات $\frac{\partial u}{\partial t}$ و $\frac{\partial v}{\partial t}$ بیضوی هستند.

✓ ترتیب دادن مرزی سبب ایجاد یک دستگاه PDE سهموی می‌شود.

✓ مسائل غیردائمی به مسائل سهموی یا هایپربولیک می‌انجامد

✓ مسائل شامل مکانیزم‌های استهلاکی (به شکل تنش‌های لزجی قابل ملاحظه در میدان جریان یا هدایت حرارتی) منجر به مسائل سهموی می‌شود

✓ عامل استهلاکی وجود نداشته باشد:

در مسئله خطی حل با دامنه ثابت در میدان جریان باقی می‌ماند

در مسئله غیرخطی حل می‌تواند با دامنه‌ی رشد یابنده دوام پیدا کند.

انواع معادلات PDE:

- خطی ← هیچ یک از ضرائب تابع خود متغیر وابسته نباشد
- شبه خطی ← اگر ضریب بزرگترین مرتبه‌ی مشتق تابع U باشد (بقیه ضرائب می‌توانند)
- غیرخطی ← بزرگترین مرتبه‌ی مشتق ما فقط ضریبی با توانی بالاتر داشته باشد

شکل عمومی معادلات پاره‌ای مرتبه ۲ خطی:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} U_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i U_i + FU = G \quad (1)$$

برای تابع دو متغیره داریم:

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU = G \quad (2)$$

دسته‌بندی معادلات مرتبه ۲ بر اساس امکان کاهش یا تبدیل معادله‌ی ۲ توسط انتقال مشخص و تبدیل معادله به فرم استاندارد (Canonical) در یک نقطه قابل انجام است. (یعنی در یک دومین محاسبه رفتار یک نقطه می‌تواند با رفتار نقطه‌ای دیگر متفاوت باشد مثلاً در یک جا کروی و در جای دیگر بیضوی باشد. ما می‌توانیم جهت را مشخص کنیم که در آن جهت معادله دیفرانسیل ما به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شود)

در یک نقطه مثل (x_0, y_0):

$$B^2(x_0,y_0) - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) \quad (3)$$

این معادله وضعیت را در نقطه (x_0,y_0) مشخص می‌کند که اگر حاصل بزرگتر از صفر باشد در این نقطه رفتار Hyper... است و اگر برابر صفر باشد رفتار Para... و اگر کوچکتر از صفر باشد رفتار elliptic است. (بحث فقط در نقطه (x_0,y_0) است)

اگر این اتفاق برای همه‌ی نقاط بیفتد (کل دومین) می‌گوئیم معادله در کل دومین رفتار Hyp یا Para یا ellip دارد.

این اتفاق خیلی خوب است ولی رفتار معمولاً این‌گونه نیست و مسئله می‌تواند رفتارهای متفاوت در نقاط مختلف داشته باشد.

$$u = f(\xi, \eta)$$

برای معادلات با دو متغیر مستقل همیشه انتقالی وجود دارد که می‌توان مورد نظر را به فرم کانونی آن تبدیل کند.

$$\xi = \xi(x,y) \qquad \text{(لیمی)}$$
$$\eta = \eta(x,y) \quad (4)$$

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

می‌دانیم: $\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$

ژاکوبین

$J \neq 0 \longrightarrow$ در هیچ نقطه‌ای از میدان مورد نظر صفر نیست

(ما داریم انتقال معادله را در دامنه انجام می‌دهیم)

در این صورت x و y به صورت یگانه از سیستم (۴) قابل تعیین است

$$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x$$
$$U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y \quad (5)$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + U_{\eta\eta}\eta_x^2 + U_\xi \xi_{xx} + U_\eta \eta_{xx}$$
$$U_{xy} = U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_\xi\xi_{xy} + U_\eta\eta_{xy} \quad (6)$$
$$U_{yy} = U_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2U_{\xi\eta}\eta_y\xi_y + U_{\eta\eta}\eta_y^2 + U_\xi\xi_{yy} + U_\eta\eta_{yy}$$

با جاگذاری (۵) و (۶) در معادله (۲):

$$A^* U_{\xi\xi} + B^* U_{\xi\eta} + C^* U_{\eta\eta} + D^* U_\xi + E^* U_\eta + F^* U = G^* \qquad (7)$$

$$(8)\quad \begin{cases} A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\ B^* = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\ C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \\ D^* = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y \\ E^* = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y \\ F^* = F \\ G^* = G \end{cases}$$

با توجه به مشابه بودن شکل معادله‌ی مشتق شده‌ی (۷) با معادله‌ی اصلی (۲) در صورت عدم صفر شدن ژاکوبین انتقال، شکل معادله در انتقال تغییر نمی‌کند.

در مورد معادله‌ی درجه دوم (۲) به یاد می‌آوریم که ما یک دسته‌بندی بر اساس نوع مبین داشتیم که نوع معادله را مشخص می‌کرد. مبین ما بر اساس ضرایب A، B و C نوشته می‌شود. (ضرایب مشتقات بالاتر ما هستند) می‌دانیم ضرایب مشتقات درجه پایین تأثیری در مبین ما ندارند و می‌توانیم به جای شکل گسترده‌ی (۲) از فرم مشتقات بالاتر که با H نشان می‌دهیم استفاده کنیم.

$$A U_{xx} + B U_{xy} + C U_{yy} = H \qquad (9)$$

$$H = H(x, y, U, U_x, U_y) \qquad (10)$$

حال می‌خواهیم ببینیم فرم کانونی یا نرمال برای معادله‌ی ۱۰ قابل استخراج است.

$$A^* U_{\xi\xi} + B^* U_{\xi\eta} + C^* U_{\eta\eta} = H^* \qquad (11)$$

$$H^* = H^*(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \qquad (12)$$

فرض کنیم هیچ یک از ضرایب A، B، C صفر نباشند.

اگر ξ و η (متغیرهای جدید) باشند به طوری که ضرایب A^* و C^* در معادله‌ی (۱۱) صفر شوند آنگاه از معادلات (۸) خواهیم داشت:

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$

$$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

شکل A^* و C^* مشابه هم است پس می‌توانیم هر دو را برحسب ψ بنویسیم (ψ می‌تواند η یا ξ باشد)

$$A\psi_x^2 + B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = 0$$

با تقسیم حاصل به دست آمده برحسب ψ بر عبارت ψ_y^2 خواهیم داشت:

$$A\left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)^2 + B\left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) + C = 0 \qquad (13)$$

در طول منحنی ψ ثابت ($\psi = cte$) می‌توان نوشت $d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy = 0$ (دیفرانسیل کامل صفر است) پس داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y} \qquad (14)$$

با دستفاده از معادله (۱۴) و جاگذاری در (۱۳):

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0 \qquad (15)$$

معادله (۱۵) معادله جبری مرتبه ۲ برحسب متغیر $\frac{dy}{dx}$ است و ۲ ریشه درجه یک می‌دهد.

ریشه‌ها

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(B + \sqrt{B^2 - 4AC})}{2A} \qquad (16)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(B - \sqrt{B^2 - 4AC})}{2A} \qquad (17)$$

معادلات مشخصه ← معادلات مشخصه شکل دیفرانسیلی یک دسته تابع را در دو بعد محاسبه نشان می‌دهند.

معادلات مشخصه که معادلات دیفرانسیل معمولی برای خانواده‌ای از منحنی‌ها در صفحه xy می‌باشند که در طول آنها φ و η ثابت هستند
$\eta = cte \;,\; \varphi = cte$

منحنی‌های مشخصه از انتگرال معادلات مشخصه بدست می‌آیند.

یعنی امتدادهائی پیدا می‌کنیم که با انتگرال‌گیری در طول آن امتدادها، معادله دیفرانسیل معمولی خواهیم داشت.

انتگرال معادلات (۱۶) و (۱۷):

$\Phi_1(x,y) = C_1$
$\Phi_2(x,y) = C_2$ $\Rightarrow$ ثابت‌های انتگرال‌گیری

تبدیل: $\xi = \Phi_1(x,y)$ ، $\eta = \Phi_2(x,y)$ $\Rightarrow$ معادله (۱۰) به فرم کانونی خود تبدیل می‌شود

در اینجا ما را به تفکیک برای دو سه فرم بیضوی، سهموی و هذلولوی انجام می‌دهیم.

$B^2 - 4AC > 0$ هایپربولیک (هذلولوی) ← ۲ تا دو جواب داریم و دو معادله مشخصه خواهیم داشت. $\Rightarrow$

$(11) \longrightarrow U_{\xi\eta} = H_1 \quad (18)$

$H_1 = \frac{H^*}{B^*} \qquad B^* \neq 0$

فرم کانونی معادله هایپربولیک

دو امتداد مشخصه در این حالت وجود دارد که در طول امتداد معادله دیفرانسیل پاره‌ای به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود

$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta)$

فرم دوم کانونی معادله هایپربولیک

$B^2 - 4AC = 0$ (سهموی) ← فقط یک جواب داریم و یک معادله مشخصه داریم $\Rightarrow$

$U_{\eta\eta} = H_3(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$

$U_{\xi\xi} = H_3^*(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$

که در این امتداد یک معادله دیفرانسیل سهموی پاره‌ای را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کنیم و روی آن انتگرال‌گیری می‌کنیم.

یک امتداد مشخصه در سهموی وجود دارد که در طول این امتداد معادله دیفرانسیل پاره‌ای به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود

$B^2 - 4AC < 0$ (بیضوی) $\Longrightarrow$ جواب واقعی ندارد. در مورد بیضوی معادلات ما امتداد حقیقی نداریم.

سطوح ساده سازی معادلات ناویر استوکس

اشکال حدی معادلات ناویر استوکس (N.S)

← معادلات ناویر استوکس بسیار پیچیده اند (مرتبه ۲ ، پاره‌ای غیرخطی و کوپل هستند) ما باید این معادلات را ساده کنیم. ما می دانیم جریان‌های مختلف دارای طبیعت‌های مختلف هستند که طبیعت‌های غالب باعث می شوند که بتوان ترم ناویر استوکس را ساده نمود. مثلاً برای جریان‌های رینولدز بالا برای اینکه اثرات لزجت در لایه مرزی خیلی نازک می شود و فقط تغییرات کوچکی هستند ما برای تخمین اولیه از این لایه نازک در برابر کل دومین صرف نظر می کنیم. پس طبیعت جریان غیرلزج حاکم می شود و ناویر استوکس را برای جریان غیرلزج ساده سازی می کنیم. باید از این لایه بتوانیم صرف نظر کنیم و توجه خود را به لایه مرزی معطوف کنیم باز هم می توان یک طبیعت غالب یافت، گرادیان (تنش برشی) در امتداد عمود بر محور جریان خیلی بیشتر از گرادیان ها در طول محور جریان هستند و می توان از مشتق های جزئی در راستای اصلی (محور جریان) در مقابل عمود بر جریان صرف نظر کرد. در جریانهای با رینولدز پایین، زمان مشخصه برای گذشتن جریان نسبت به زمان مشخصه برای پخش ورتیسیته از روی دیواره به داخل دومین (در داخل دومین) کوچکتر است.

زمان مشخصه characteristic time

$t = \frac{u}{L}$

وقتی در اطراف جسمی جریان با Re پایین باشد اگر یک ذره را دنبال کنیم. اگر طول L را طی کند (در زمان مشخصه) زمان مورد نظر قابل مقایسه است با زمانی که ورتیسیته روی سطح جسم به داخل دامین می رود (زمان مشخصه دوم) ⟸ اگر t اولی از t دومی کوچکتر باشد ⟸ یعنی تمام دامین تحت تاثیر لزجت است و لزجت همه جا پخش شده است.

$\sum F = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$ ← گرانش، الکترومغناطیس، فشار، نیروهای لزجت، کشش سطحی — نیروهای اینرسی

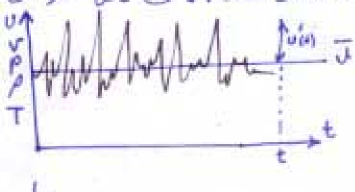
$\xrightarrow[\text{تقسیم بر } ma]{\text{نرمالایز کردن}} N_1 + N_2 + N_3 \cdots = 1$

اعداد بدون بعد مانند رینولدز و پرانتل و ...

ما ترم هایی با اهمیت را (دارای اهمیت) را نگه داشته و از سایرین (کوچک) صرف نظر می کنیم.

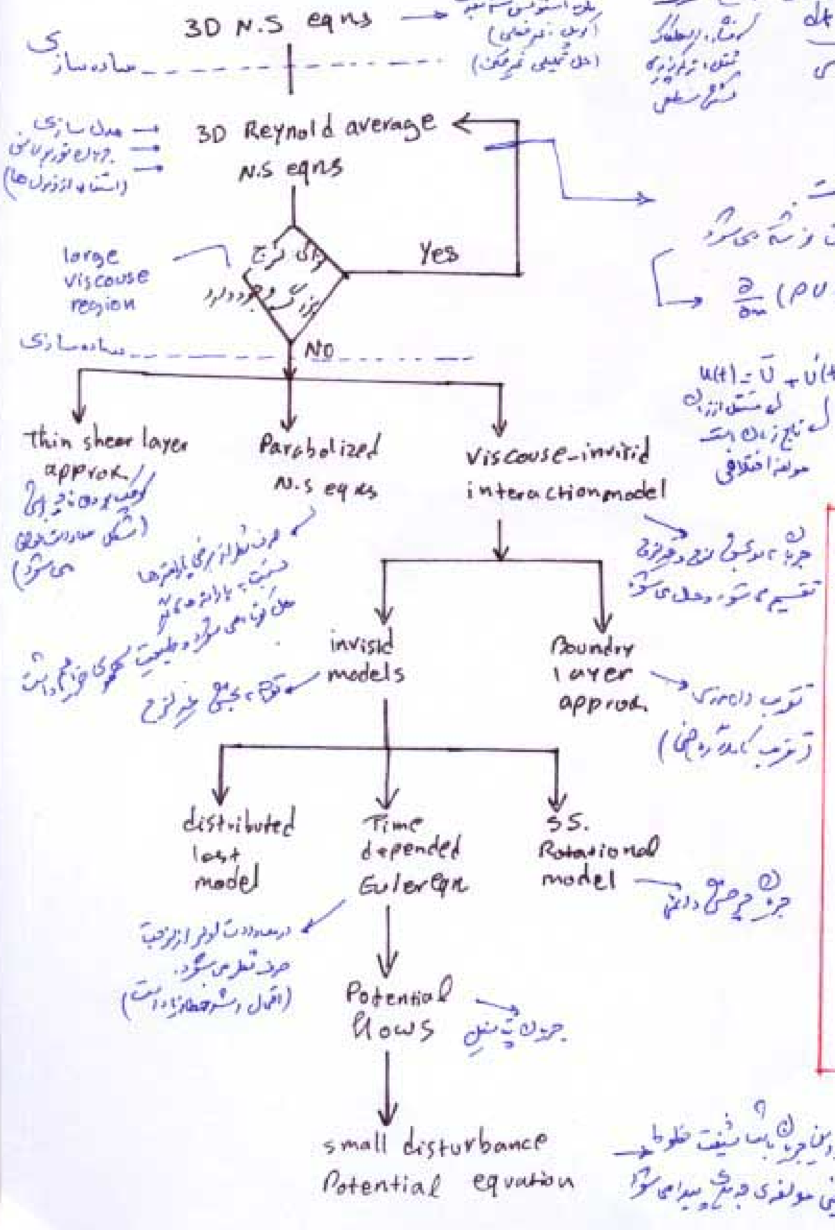
یکی از راه های ساده سازی متوسط گیری زمانی از معادلات ناویر استوکس است. شکل کلی معادله همان ناویر استوکس است اما برای مقادیر متوسط زمانی نوشته می شود.

$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\,\bar{U}\,\bar{U})$



$u(t) = \bar{U} + u'(t)$ ← که مستقل از زمان است ← تابع زمان است، مولفه اختلافی

$\bar{U} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} U(t)\,dt$



وجود جسم ضخیم در داخل جریان باعث تغییرات خطوط جریان می شود یعنی مولفه ی جریان پیدا می شود

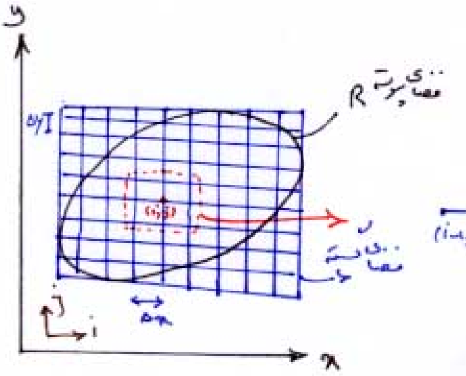
همه نقاط به هم وابسته هستند و مارچ کردن ممکن نیست و معادلات با هم باید حل شوند

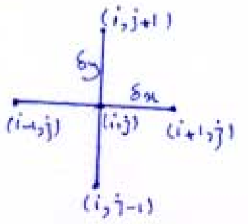
در جهت زمان مارچ با صورت می گیرد ولی در جهت مکان معادلات باید با هم حل شود

	Steady	Unsteady
Viscous flow	elliptic	Parabolic
inviscid flow	M<1 ell. M>1 Hyp	Hyperbolic
Thin Shear layers	Parabolic	Parabolic

روش های گسسته سازی معادلات

روش تفاضل محدود





برای حل عددی معادلات باید معادلات را گسسته سازی کنیم.

(انتقال اطلاعات در dx و dy) $\Leftarrow$

فرض معادله به صورت $\overbrace{u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}}^{\text{کانوکشن}}=\overbrace{\alpha(\nabla T)}^{\text{دیفیوژن}}$

پیوسته (بقای انرژی) مجهول (در دو بعد) T است.

(با فرض معلوم بودن u و v [میدان سرعت])

✓ در تمام معادلات انتقال معادلات مشتق مرتبه اول و دوم ظاهر می‌شود ما به جای این مشتقات عبارات جبری و تقریب زده شده را جایگزین می‌کنیم

برای تقریب مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم در داخل معادلات حاکم می‌توانیم به شکل زیر عمل کنیم.

① استفاده از بسط تیلور

برای یک $f(x)$ که در $x=x_0$ به صورت نامتناهی مشتق پذیر باشد

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (1)$$

a_n ضرایبی هستند که به f و مشتقات f وابسته هستند (در $x=x_0$)

$$x=x_0 \Rightarrow f(x_0)=a_0$$

مشتق نسبت به x

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\dots \qquad (2)$$

$$x=x_0 \Rightarrow a_1=f'(x)$$

مشتق گیری از (۲)

$$f''(x)=2!\,a_2+3!\,a_3(x-x_0)+\dots \qquad (3)$$

$$x=x_0 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0)$$

با ادامه‌ی روش کار داریم $\Leftarrow$ $\boxed{a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)}$ که $f^{(n)}=\frac{d^nf}{dx^n}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

بسط تیلور $f(x)$ در $x=x_0$

← برای تابع تحلیلی $f(x)$ می‌توان یک سری تیلور $f(x+\Delta x)$ را بسط داد. (فرض $\Delta x = h$) $\Delta x = x - x_0$

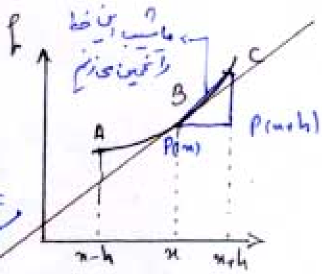
$$f(x+\Delta x) = f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\text{تقریب تفاضل محدود مشتق اول تابع}} - \underbrace{\frac{h}{2!} f''(x) - \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \dots}$$

f' را استخراج می‌کنیم.

h بسیار کوچک است و توان‌های بعدی کوچکتر می‌شود و قابل صرف‌نظر کردن است. (خطای برشی)

$o(h)$ خطای برشی ← $o(h)$ order(h) یعنی وابستگی مقدار زیادی به h دارد که خطای تقریب ماست.



مشتق که معادل با شیب خط مماس است که با خط آبی (در تقریب) زدیم

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(h)$$

ما این تقریب را برای هر نقطه انجام می‌دهیم. یعنی معادلات دیفرانسیل را به معادلات جبری تبدیل می‌کنیم.

$$\boxed{f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + o(h)}$$

تقریب تفاضلی پیشرو برای $f'(x)$ از مرتبه $h = \Delta x$

Forward finite diff.

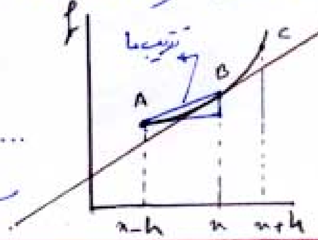
$f'_i = \frac{\Delta f_i}{h} + T.E.$ $\quad T.E. = f'_i - \frac{\Delta f_i}{h}$

اگر $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ را اپراتور تفاضل پیشرو تعریف کنیم.

← تابع تحلیلی $f(x)$ را با یک سری تیلور $f(x-\Delta x)$ بسط می‌دهیم. $(\Delta x = h)$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x)$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x-h)}{h}}_{\text{تقریب تفاضلی برای مشتق}} - \underbrace{\frac{h}{2!} f''(x) + \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \dots}_{T.E.}$$



$$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + o(h)$$

$$\boxed{f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + o(h)}$$

تقریب تفاضلی پسرو برای $f'(x)$ از مرتبه $h = \Delta x$

Back ward finite diff.

$f'_i = \frac{\nabla f_i}{h} + o(h)$

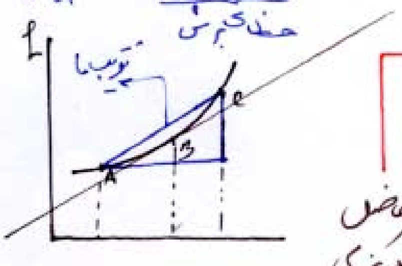
اگر $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ را اپراتور تفاضل پسرو تعریف کنیم.

← دو تخمین بالا را با هم تلفیق می‌کنیم

$$\left.\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + h f'(x) \dots \\ f(x-h) &= f(x) - h f'(x) + \dots \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{از هم}]{\text{کم کردن}} f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \underbrace{\frac{h^2}{6} f''' + \dots}_{\text{خطای برشی}}$$

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h^2)$$

که h^2 از h کوچک‌تر است پس خطا کوچک‌تر شده است



$$\boxed{f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + o(h^2)}$$

که h^2 اینجا کوچکتر است

تقریب تفاضل مرکزی

✓ تقریب مشتقات بالاتر ←

$$f''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h)$$ تقریب تفاضل پیشرو

$$f''_i = \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} + O(h)$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} + O(h)$$ تقریب تفاضل پسرو

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$ تقریب تفاضل مرکزی

✓ پیشرو مرتبه‌ی ۲ : از سه نقطه بوسیله تفاضل پیشرو استفاده شد. دقت از مرتبه‌ی ۱ به ۲ ارتقاء یافته است.

$$f'_i = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} + O(h^2)$$

✓ تقریب‌ها جایی که در آن مشتق اول ظاهر می‌شود با تقریب مرتبه‌ی ۱ مشکلاتی دارد ما مجبوریم تعداد نقاط بیشتری از همسایه‌ها برای تقریب مورد استفاده قرار دهیم (مثلاً سه نقطه که دقت ما از مرتبه‌ی ۱ به ۲ ارتقاء یابد)

✓ فرض کنید تابع u برحسب t (زمان) را داشته باشیم. که تغییرات شدیدی داشته است. و ما برای حل t را به Δt های کوچک یا بزرگ تقسیم می‌کنیم.

فرق Δt بزرگ و کوچک چیست؟

Δt بزرگ زمان حل را کم می‌کند.

Δt کوچک زمان حل را زیاد می‌کند همچنین دقت ما افزایش می‌یابد.

روش های گسسته سازی

① روش F.D.M (finite difference method)

منطق: بر اساس جایگزینی مشتقات متغیر وابسته مثل $\frac{\partial P}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ و .... با عبارات تقریبی جبری تفاضل محدود.

در هر نقطه از شبکه محاسباتی معادله یا دستگاه معادلات PDE ما با معادلات جبری جایگزین می شود.

✓ PDE خطی ← معادلات جبری خطی

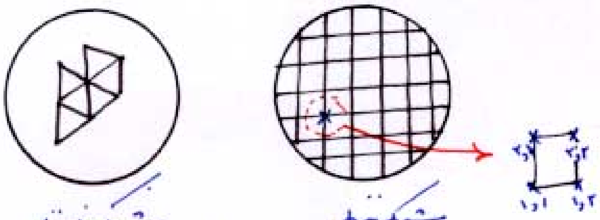
PDE غیرخطی ← معادلات جبری غیرخطی

- این روش قدیمی ترین روش برای حل PDE (Partial differential equations) است. (و نه مجبور)

- ساده ترین روش است برای هندسه های ساده (عامل انطباق با مختصات معمولی مثل کارتزین، استوانه ای و کروی)

- F.D. به صورت اصولی در هر نوع شبکه ای قابل استفاده است. (اما در کارهای انجام شده بیشتر در شبکه های سازمان یافته استفاده شده است.) (در هندسه های نامنظم و در کنار مرزها روش F.D. به مشکل می خورد)

(شبکه های نامنظم با تمام بی نظمی در بسیاری از مسائل مشکل، حل های بهتری ارائه می دهند)



شبکه نامنظم

شماره گذاری نودهای شبکه نظم خاصی ندارد و کد نویسی هم سخت است.

شبکه منظم

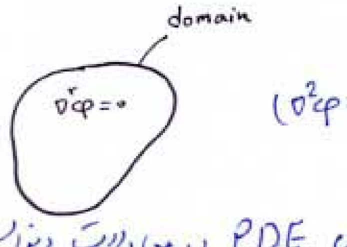
شماره گذاری نودها منظم است پس همسایه هر نقطه مشخص است

- برای تقریب مشتقات از بسط تیلور و چندجمله ای ها استفاده می شود.

- اشکال F.D.M در عدم ارضا خاصیت های بقائی (مگر در شرایط خاص) و محدودیت در کاربرد در هندسه های ساده است.

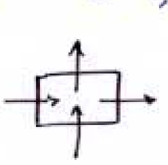
۲) روش F.V.M یا C.V.M (Finite volume or Control volume method)

- این روش از فرم انتگرالی معادلات بقا استفاده می‌کند.

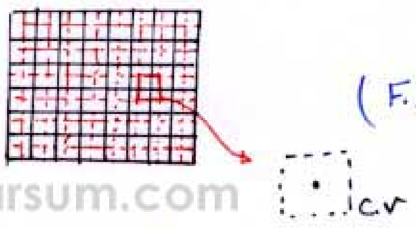


یک دومین رو به رو را در نظر بگیرید. PDE ها در هر نقطه از این فضا صادق است ($\nabla^2\varphi=0$) و با دیفرانسیل حل می‌شود.

وقتی یک ناپیوستگی در سطح داشته باشیم (شوک که میدان جریان را ناپیوسته می‌کند) برای حل PDE در معادلات دیفرانسیلی به مشکل برمی‌خوریم. در عوض معادلات بصورت انتگرالی چون به کل دومین نگاه می‌کنیم این ایراد قابل حل می‌شود.



در این روش به مرزها و سطوح اطراف نگاه می‌کنیم و ناپیوستگی داخلی مهم نیست.



- میدان حل ما (میدان محاسباتی) به تعدادی حجم کنترل تقسیم می‌شود. حول هر نقطه یک حجم کنترل در نظر می‌گیریم. (نقطه‌چین‌ها) (برخلاف F.D.M)

معادلات را برای هر C.V داخل دومین ارضا می‌کنیم.

شکل انتگرالی معادلات را روی این C.V ها ارضا می‌کنیم، در کل با جزء جزء ارضا شدن معادلات بقا در کل دومین معادلات بقا ارضا خواهد شد.

- برای بیان مقادیر متغیرها در سطوح C.V از میانیابی استفاده می‌شود.
- یک دستگاه معادلات جبری بدست می‌آید. — از هر شبکه‌ای می‌توان استفاده کرد (برای هندسه‌های پیچیده مناسب است)
- روش در اساس بقایی است تا زمانی که انتگرال‌های سطح که بیانگر فلاکس‌های جابجایی و نفوذ هستند برای حجم کنترل‌هایی با مرز مشترک مشابه باشند (منظور این است اگر دو المان کنار هم در نظر بگیریم عبارت توصیفی برای فلاکس خروجی المان A مشابه باشد با ورودی B)

اگر از A به B شار برود به B باید همان برسد
در مرز انباشتگی نداریم.

مرز یک سطح صوری است و توانایی ذخیره‌سازی ندارد

- از نظر برنامه‌نویسی و فهم ساده‌ترین روش است (روابط ساده ریاضی نسبت به F.E.M)
- تمام ترم‌هایی که نیاز به تقریب دارند معنای فیزیکی دارند.
- در قیاس با F.D.M استفاده از این روش با دقت‌های بالاتر از مرتبه ۲ در مسائل سه بعدی سخت است. (در F.D یک سطح تقریب داریم ولی در F.V (C.V) دو سطح تقریب داریم، هرچه سطح تقریب بیشتر باشد کار مشکل‌تر است)

۳) روش (Finite element method) F.E.M

- از بسیاری جهات شبیه روش F.V.M است.
- میدان محاسباتی به تعدادی المان محدود که معمولاً غیرساختاریافته هستند تقسیم می‌شوند (در دو بعدی به شکل مثلث یا چهاروجهی و در سه بعدی به شکل هرم هستند)
- فرق اصلی F.E با F.V آن است که قبل از انتگرال‌گیری روی کل میدان معادلات در یک تابع وزن ضرب می‌شوند.
- حسن بزرگ این روش کاربرد ساده‌تر آن در هندسه‌های پیچیده است.
- بزرگترین مشکل F.E آن است که معادلات جبری حاصل ساختاریافته نیستند

$$\left[\text{ماتریس ضرائب}\right]\left[\varphi's\right]=\left\{b's\right\}$$

ماتریس ضرائب در F.V باندی است ... و باندها جدا هستند

در F.E تمام عنصرها مقدار دارند و گسترده هستند و در سراسر ماتریس پخش شده‌اند.

واضح است با این اوصاف حل معادله در F.V ساده‌تر از F.E خواهد بود.

با روش حل معادلات استفاده از ماتریس با عنصرهای گسترده، دسته‌بندی عنصرهای هم‌منطقه و با المان‌های متفاوت حل مختلف است

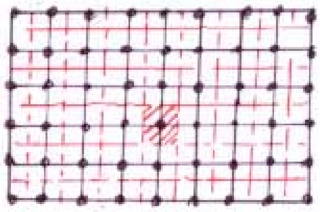
دسته‌بندی گره‌های عنصر

خانواده‌های F.V (C.V):

- (Finite volume Base finite difference method) F.V.B.F.D.M
  نرم‌افزار فلوئنت بر این اساس کار می‌کند. (روش متداول)
- (Finite Volume Base finite element method) F.V.B.F.E.M

تکنیک پیشرفته‌تر که هنوز همه‌گیر نشده است. تلفیق F.V یا F.E (برای مسائل با هندسه پیچیده) است که حسن هر دو روش را دارد ولی کاربردی شدن این روش زمان‌بر است و هنوز احتیاج به توسعه دارد.

مراحل روش Control Volume (finite volume)



۱- میدان پیوسته را گسسته می‌کنیم (تبدیل میدان به حجم های کنترل)

ابتدا نقاط را بدست می‌آوریم (grid point) و حول هرکدام حجم کنترل می‌سازیم (grid line)

تقسیم بندی نقاط ← داخلی ← حجم کنترل کامل با چهار سطح در اطراف

← مرزی ← half C.V. (نقاط ضلعی)

1/4 C.V. (نقاط گوشه)

۲- از معادله یا معادلات دیفرانسیل انتگرال می‌گیریم (روی تمام C.V. ها) $\int_{CVs} P.D.E \; dx\,dy\,dz\,dt$

۳- برای تبدیل این انتگرال، عبارت جبری مجبور به استفاده از توابع توزیع برای تخمین برخی ترم های داخل معادله انتگرالی هستیم

۴- حاصل کار ما دستگاه معادلات جبری است که بصورت ماتریس ضرایب حل می‌شود.

$$\left[\quad\right]\left\{\Phi_s\right\} = \left\{C_s\right\}$$

ماتریس قطری خوش رفتار ها

✓ انتخاب توابع توزیع دست ماست پس معادلات جبری حاصل می‌تواند در اشکال مختلف ظاهر شود.

✓ ارضاء معادلات بقاء روی هر جزء C.V. به معنی ارضا معادلات بقا روی کل C.V. است.

۵- حل نهایی، یعنی ما بقاء انتگرالی (مومنتوم، جرم، انرژی) را برای هر تعداد از C.V. ها داریم پس برای کل C.V داریم

✓ این ارضاء را برای هر تعداد نقاط می‌توان نوشت.

✓ ما مجبور هستیم که تعدادی پروفیل توزیع برای بیان تابع مجهول بین نقاط شبکه استفاده کنیم.

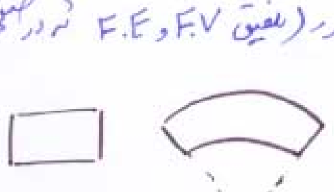
$\phi = f(x, y, z, t)$

✓ پروفیل های متفاوتی را می‌توان بعنوان توابع توزیع استفاده کرد.

تخمین های ما بین دو نقطه که نداریم (چندجمله‌ای درجه ۲ و ...)

✓ گفتیم این روش برای هندسه های قابل تطبیق روی یک دستگاه مختصات (دکارتی، کروی، استوانه‌ای) کاربرد دارد.

البته برای هندسه های پیچیده هم می‌توان از این روش استفاده کرد که سختی هایی دارد (تلفیق F.V و F.E که در صفحه‌ی قبل آن را به نام F.V.B.F.E.M معرفی کردیم)



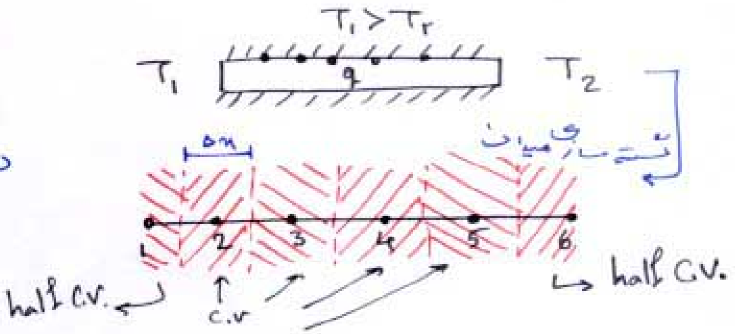
هندسه های ساده

هندسه پیچیده

روش انجام مراحل حل در روش Control volume (F.V. یا C.V.)

فرض: مسأله‌ی یکنواخت و تک‌بعدی از هدایت گرمائی:

Steady one-dimensional heat Conduction:



$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S=0$$ معادله انرژی

$$\underbrace{SC\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{تغییرات انرژی}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u T)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v T)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w T)}_{\text{کانوکشن}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}_{\text{دیفیوژن}}+\underbrace{q}_{\text{منبع (سورس)}}$$

تغییرات انرژی $= 0$

کانوکشن $= 0$

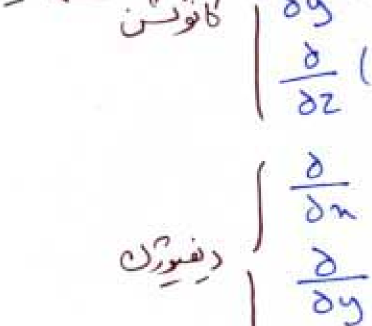
مسأله تک‌بعدی (در راستای y و z هیچ تغییری صورت نمی‌گیرد)

← فقط هدایت حرارتی و سورس داریم.

در راستای y و z ابعاد واحد هستند

در راستای x ابعاد C.V. برابر Δx است.

پس معادله انرژی به فرم روبرو ساده خواهد شد → $\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S=0$ → از این معادله روی C.V. انتگرال می‌گیریم. → چون روش کار هربار تکرار می‌شود بهتر است یک روش را بسازیم:



← هر نقطه هدف انتگرال‌گیری را P و نقاط شرقی و غربی را E و W می‌نامیم

نقاط e و w محل مرزها هستند (به بزرگ و کوچک بودن حروف دقت شود)

طول C.V. را با ΔX و فاصله نقاط همسایه را با δx نشان می‌دهیم

حال روی C.V. انتگرال می‌گیریم:

$$\int_w^e \left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S\right]dx = \int_w^e \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)dx + \int_w^e S\,dx$$

$$= k\frac{dT}{dx}\Big]_w^e + \int_w^e S\,dx$$

→ این کار را برای یک تک C.V. ها انجام داده‌ایم (تصویر تک‌ها را نگاه کنید)

معادله‌ی بقای انرژی را انتگرال‌گیری کردیم:

$$\left(k\frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k\frac{dT}{dx}\right)_w + \int_w^e S\,dx = 0$$

حال شروع به تخمین عبارت‌ها را می‌کنیم:

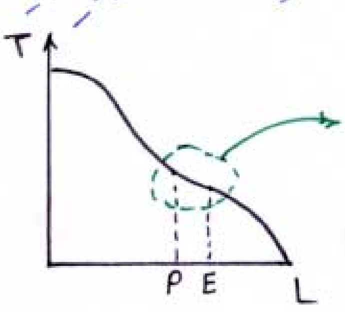
$$k_e \frac{dT}{dx}\Big|_e \begin{cases} \frac{dT}{dx}\Big|_e \cong \text{?} & \text{عبارت جری} \\ k_e \to \text{?} \end{cases}$$

مقدار ضریب هدایت حرارتی در e (k_e) را باید بدانیم.

همچنین مشتق T (شیب پروفیل دما) در نقطه e را باید تخمین بزنیم.

مثلاً برای تخمین $\frac{dT}{dx}$ می‌توانیم از تخمین خطی یا درجه ۲ استفاده کنیم.

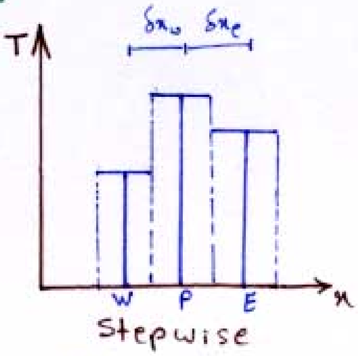
احتمالاً فرض کنیم نحوه‌ی تغییرات دما به فرم روبرو باشد (در اصل ما نمی‌دانیم تغییرات چگونه است که مجبوریم تخمین بزنیم)



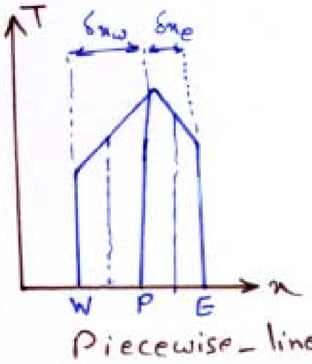
تابع تخمینی

$T \cong f(x)$: در فاصله P تا E

انواع توابع تخمینی (مثلاً)



Stepwise



Piecewise_linear

روی هر C.V مقدار دما ثابت فرض شود

↓

این انتخاب مناسب نیست

چون دنبال مشتق T در محل‌های ناپیوسته هستیم!

در فاصله بین هر دو نقطه، T را یک تابع خطی فرض می‌کنیم.

↓

مناسب است.

از تخمین نوع دوم

Piecewise-linear

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{\delta x_e}, \qquad \left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{\delta x_w}$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{\text{معادله انرژی}} \quad k_e\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e}\right) - k_w\left(\frac{T_P - T_W}{\delta x_w}\right) + \int_w^e S\,dx = 0$$

هنوز در معادله‌ی انرژی انتگرال و مقادیر نامشخص k_e و k_w را داریم.

- برای Source Term: می‌تواند تابع دما یا مقادیر ... باشد. برای خطی شدن می‌توانیم روی حجم کنترل کوچک یک $\bar S$ فرض کرد.

$$\bar S = S_c + S_p T_p$$

نسبت S با T را خطی فرض می‌کنیم

$$\int_w^e S\,dx = \int_w^e \bar S\,dx = (S_c + S_p T_p)\,\Delta x$$

< حال در معادله‌ی انرژی همه‌ی عبارات انتگرالی حذف شده‌اند >

The discretization equation

$$\overbrace{\frac{k_e(T_E-T_P)}{\delta x_e}}^{\text{هدایت به سمت}} - \overbrace{k_w\frac{(T_P-T_W)}{\delta x_w}}^{\text{هدایت به سمت داخل}} + (S_C+S_P T_P)\Delta x = 0 \leftarrow$$ معادله‌ی جبری انرژی

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \Longleftarrow$$ نمایش شکل دیسکریت شده‌ی معادله‌ی انرژی

Thermal conductance ← $a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}$ $\quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}$
عکس مقاومت دارد

$a_P = a_E + a_W - S_P \Delta x$

Total generation ← $b = S_C \Delta x$

$$a_P T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b \Leftarrow$$ کل حجم کنترل

✓ برای ترم‌های k_e و k_w چه کار باید کرد؟

دو حالت وجود دارد → جسم همگن باشد: به جای k_e از k_E استفاده می‌شود که همه جا یکسان است.

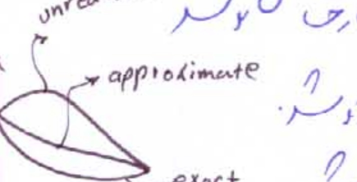
جسم همگن نباشد: ساده‌ترین ترکیب دو طرف نقطه ترکیب خطی دو k اطراف آن است.
(که با این کار به مشکل می‌خوریم.

باید e را توسط E و P (نقاط اطراف اصلی) تعریف درست سازد.

اصولی که باید رعایت شود (guiding Principles)

- اگر یک شبکه با تعداد نقاط کم اختیار کنیم، نباید معادلات گسسته بدون کار حس بشود

مثلاً فرض کنید تابع φ برحسب x در حوزه‌ی حل ما (۰ تا L) پروفیل روبرو را داشته باشد.
یعنی نمودار روبرو جواب حقیقی باشد، جواب تقریبی ما باید شبیه همین شکل باشد.
در نقاط ابتدا و انتها (شرایط مرزی) تقریبی و تحلیلی یکسان است. ولی در نقاط میانی تقریب شبیه نمودار
کمی متفاوت است که مشکلی ندارد. اما نباید رفتار نقاط میانی عجیب غریب باشد.



پس برقراری دو شرط‌ها همواره لازم است:

① رفتار فیزیکی realistic بدهد

② بالانس کمی تمام کمیت مورد نظر را در کل میدان ارضا کند.

شکل روبرو با اختلاف ۱۵٪ شرط اول بالا را دارا است. یعنی رفتار کمی تقریبی با رفتار کمی تحلیلی تقریباً یکسان است.

چطور کنیم که معادله‌ی $a_P \varphi_P = \sum a_{nb} \varphi_{nb} + b$ دو شرط بالا را ارضا کند؟

باید چهار قانون رعایت شود.
اگر معادلات گسسته شده توسط حجم کنترل دارای ۴ خاصیت (قانون) لازم نباشد، پاسخ‌های حاصل از آن دارای ماهیت فیزیکی واقعی نخواهد بود.

ما باید بفهمیم اگر قانونی ارضا نشده در حل عددی چه اتفاقی افتاده که جواب درست را به دست بیاوریم

قوانین:

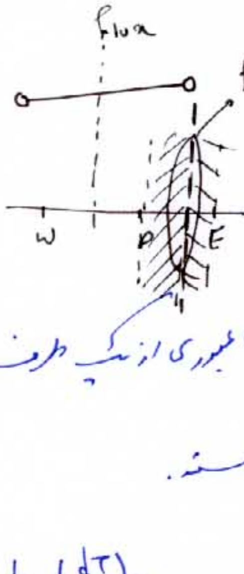
۱- قانون سازگاری در سطوح حجم کنترل Consistency of C.V faces

۲- ضرائب مثبت Positive Coefficients

۳- شیب سورس منفی negative S_P

۴- مجموع ضرائب Sum of the neighbor Coefficients

۱- قانون سازگاری در سطوح حجم کنترل



فرض کنید یک face برای c.v در نظر می‌گیریم که مشترک بین دو نقطه‌ی همسایه است. اگر مقدار شار جریان (گسسته شده) را از سمت چپ یا راست این face نگاه کنیم نباید تفاوت کند، یعنی هر فلاکسی که از سمت چپ وارد می‌شود باید عیناً از راست خارج شود (و بالعکس) یعنی هیچ انباشتگی در face نباید باشد و فلاکس‌های عبوری از یک طرف از طرف دیگر خارج شوند. در این صورت می‌گوییم معادلات گسسته شده سازگار هستند.

یکی از مواردی که ممکن است این قانون را نقض کند k است.

$k_w\left(\frac{dT}{dx}\right)_w$

$k_e\left(\frac{dT}{dx}\right)_e$ ⟵
- $\to k_P\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e \to$ مربوط به c.v سمت چپ
- $k_E\left(\frac{\partial T}{dx}\right)_e \to$ مربوط به c.v سمت راست

$\Longrightarrow$ جایگذاری این دو عبارت در معادله‌ها نباید نتایج متفاوتی را بدهد.
در حقیقت اگر جواب‌ها یکسان نباشد یعنی چیزی در face ذخیره شده است.

← ما باید مقدار درست ke را بدست آوریم تا شرط سازگاری ارضا شود

۲- قانون مثبت بودن ضرایب

$a_P\varphi_P = \sum a_{nb}\varphi_{nb} + b$

$\hookrightarrow a_E T_E + a_W T_E$

در معادلات جبری ضرایب باید هم علامت باشند (مثبت باشند)
اگر هم علامتی اتفاق نیفتد اگر مقدار T در یک نقطه زیاد شود، تأثیرات روی نقاط همسایه بالعکس خواهد بود یعنی اگر نقطه‌ای را گرم کنیم دمای نقاط اطراف پائین می‌آید که غلط است. (اگر هم علامت باشند، افزایش دما روی تمام نقاط تأثیر علامتی مثبت می‌گذارد)

۳- قانون شیب سورس منفی

$$a_P = \overset{+}{a_E} + \overset{+}{a_W} \underbrace{- S_P \Delta x}_{+ \Rightarrow S_P<0}$$

باید شیب ترم خطی برای ترم سورس حتماً منفی باشد (یا صفر) چون:

اگر S_P منفی نباشد ممکن است a_P منفی شود و قانون دوم نقض شود. (اگر S_P مثبت باشد unstable situation داریم)

یا اگر S_P مثبت باشد حل به سوی انفجار پیش می‌رود و خطای ما فوق العاده بزرگ خواهد بود. چون:

$T_P\uparrow \to S\uparrow \to T_P\uparrow \to S\uparrow \to \dots$ خطای فوق العاده بزرگ

۴- $a_P = \sum a_{nb}$

یعنی اگر دما در مرزی توسط مقدار ثابتی افزایش یابد تمام دماها باید به مقدار ثابتی افزایش پیدا کنند.
یعنی T و T+Constant باید در معادله دیفرانسیل صدق کنند.
می‌توان با جایگذاری T و T+C در معادله دیفرانسیل این قانون را اثبات کرد.

✓ ممکن است برنامه ی ما دیرادی پیدا کند ① جواب های غیر واقعی ② نوسان حل عددی ③ عدم همگرایی حل و میل به سوی اعداد بزرگ
با اتفاق افتادن هر یک از این سه مورد باید دریافت یکی از فرمولاسیون صنعتی ما با مشکل مواجه شده است.

مسائل شبه هدایت

✓ مسائل شبه هدایت چیست؟ فرمولاسیون مشخصی که برای مسائل مختلف هدایت آوردیم مدنظر است.
درحقیقت مسائلی شکل مسئله کاندکشن را پیدا می کنند.

جریان پتانسیل (لاپلاسین φ) ← معادله ی پتانسیل $\nabla^2\varphi=0$ است که شبیه $\nabla^2 T=0$ است.

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla^2 T+\frac{q'''}{k}$$ معادله هدایت حرارتی در حالت کلی

کارتزین ← $$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}$$ ← انرژی تولید شده در واحد حجم

استوانه ای ← $$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}$$

در حالت دائمی و بدون منبع → $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}=0$, $\dot{q}=0$ $\Rightarrow$ $\nabla^2 T=0$ $\Rightarrow$ معادله دما شبیه تابع پتانسیل شده است.

یعنی اگر نرم افزاری برای حل معادله هدایت حرارتی دائمی نوشتیم می توانیم از آن برای حل معادله پتانسیل هم استفاده کنیم.

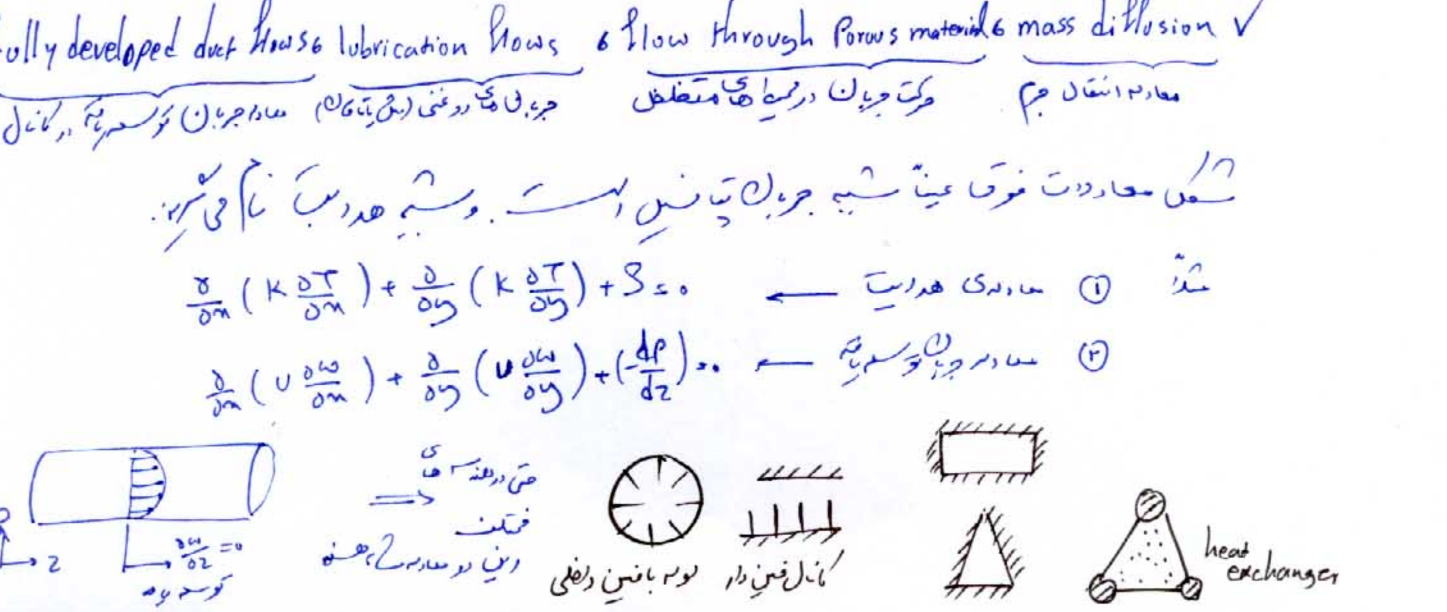
fully developed duct flows، lubrication flows، flow through porous materials، mass diffusion ✓

معادله جریان توسعه یافته در کانال — جریان های روغنی (بین یاتاقان) — حرکت جریان در محیط های متخلخل — معادله انتقال جرم

شکل معادلات فوق عیناً شبیه جریان پتانسیل است. و شبه هدایت نام می گیرند.

مثلاً ① معادله ی هدایت ← $$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+S=0$$

② معادله جریان توسعه یافته ← $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\left(-\frac{dp}{dz}\right)=0$$



✓ ما حل به روش C.V (Control Volume) را از ساده به پیچیده می‌آموزیم
(اول فقط هدایت، سپس هدایت و میدان جریانی معلوم
و در آخر حل معادله در میدان جریان نامعلوم را بررسی می‌کنیم)

↓ Conduction Type
Conduction – Convection Type
Fluid – Flow

✓ مسئله Conduction ساده‌ترین نوع حل را دارد و پیچیدگی ندارد چون ترم‌های اکانوکشن صفر هستند.
خواهیم دید ترم اکانوکشن به خصوص زمانی که میدان جریان معلوم نباشد در حل مشکلات زیادی ایجاد می‌کند.
(مشتق اول در معادلات کار را بسیار مشکل می‌کند (برخلاف مشتق دوم)) در حقیقت ترم مشتق اول
در جریان‌های مختلف رفتارهای مختلف و متفاوتی از خود نشان می‌دهد که نمی‌توان قالب خاصی
برای این ترم در تمام جریان‌ها در نظر گرفت.

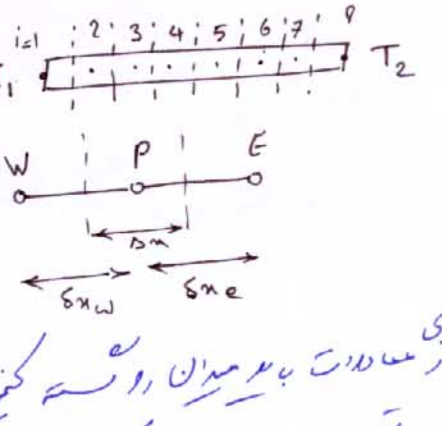
یادآوری و تکمیل بحث مربوط به حل یک بعدی دائمی همراه با سورس

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b$$

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e} \qquad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}$$

$$a_P = a_E + a_W - S_P \Delta x$$

$$b = S_c \Delta x$$

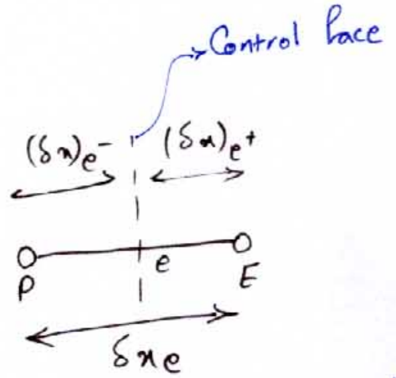


✓ قبل از گسسته‌سازی معادلات باید میدان را گسسته کنیم. نکاتی هم در این مورد:
① شبکه محاسباتی (grid) الزامی بر یک‌اندازه بودن ندارد یعنی $\Delta x_w \neq \Delta x_e$ است (ساده هم ساده‌تری)
② یک شبکه یکنواخت لزوماً بهتر از یک شبکه غیر یکنواخت نیست. مثلاً روی یک نقطه شعله‌ای را قرار دهیم،
توزیع دما در اطراف این نقطه اثر بیشتری دارد و گرادیان شدت بیشتری دارد، پس ما برای حل مسائل دقیق‌تری
و محاسبه دما باید اطراف شعله در حجم نقاط بیشتری نسبت به جاهای دیگر در نظر بگیریم.
✓ هر جا گرادیان بیشتری داریم به تعداد نقاط بیشتر (شبکه‌بندی ریزتر) نیاز است.
در نقاطی که دما ثابت است (گرادیان نداریم) یک شبکه درشت با شبکه ریز تفاوتی ندارد.
پس بهتر است در نقاط دما ثابت برای صرفه‌جویی در زمان، نقاط کمتری را قرار دهیم تا حجم محاسبات کم شود.

نکته مهم: از کجا بفهمیم در کدام قسمت گرادیان بیشینه است که شبکه بندی را در آنجا ریزتر کنیم؟

① به شرایط مسئله نگاه می‌کنیم (مثلاً در مسئله‌ی دمای مرزی یا مسئله‌ای مثل قرار دادن شعله در یک قسمت از جسم واضح است در جاهایی که تغییرات بیشتر است باید شبکه بندی را ریز کرد)

② استفاده از یک ترتیب اولیه نیز در برخی مواقع کارساز خواهد بود. یکبار کل میدان را بوسیله تعداد نقاط کم شبکه بندی کرده و معادلات را حل می‌کنیم. جواب بدست آمده می‌تواند به ما نشان دهد در کدام نقاط گرادیان شدیدتر است. حال می‌توانیم برای حل اصلی در محل های مذکور، شبکه ها را ریزتر کرده و مسئله را حل کنیم.



تخمین Γ (The interface Conductivity)

در معادله‌ی انرژی Γ همان k است.

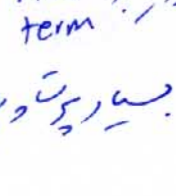
نکته: مجبور هستیم مقدار هدایت در نقاط غیراصلی شبکه را بر اساس نقاط اصلی شبکه سامان دهیم. یعنی k_e باید بر اساس k_P و k_E تعیین شود.

ساده‌ترین شکل تقریب میانگین است $k_e = \frac{k_E + k_P}{2}$ ⇐ این تقریب منجر به بیان غیرفیزیکی برای flux term می‌شود.

(وقتی در مسئله‌ی دو بعدی میانگین بین دو عدد تبدیل به میانگین بین ۴ عدد شود جواب بسیار پرت و بد خواهد شد، در مسئله‌ی سه بعدی تقریب فوق فاجعه است!)

← تقریب بین ۶ عدد

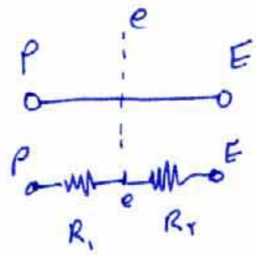
$$\frac{k_e}{\delta x_e} = \left[\frac{(\delta x)_{e^-}}{k_P} + \frac{(\delta x)_{e^+}}{k_E}\right]^{-1}$$



$\frac{k}{l}$ → قابلیت عبوردهی Conductance

$\frac{l}{k}$ → مقاومت حرارتی heat resistance

تمرین: عبارت $\frac{k_e}{\delta x_e}$ را در تخمین k در مسائل یک بعدی بدست آورید:



$\xrightarrow[\text{مدار الکتریکی}]{\text{ترکیب با}}$

$$R_1 = \frac{(\delta x)_e^-}{k_P} \qquad R_2 = \frac{(\delta x)_e^+}{k_E} \Rightarrow q = \frac{T_P - T_E}{\frac{(\delta x)_e^-}{k_P} + \frac{(\delta x)_e^+}{k_E}} \quad (1)$$

$$q = k_e \frac{T_P - T_E}{(\delta x)_e} \quad (2)$$

مقایسه ① و ②

$$\frac{k_e}{(\delta x)_e} = \left[\frac{(\delta x)_e^-}{k_P} + \frac{(\delta x)_e^+}{k_E}\right]^{-1} \Leftarrow \frac{(\delta x)_e}{k_e} = \frac{(\delta x)_e^-}{k_P} + \frac{(\delta x)_e^+}{k_E}$$

سؤال: اگر δx_e^+ و δx_e^- یکسان باشند:

$$\frac{k_e}{\delta x_e} = \left(\frac{\delta x}{2}\right)_e^{-1}\left[\frac{1}{k_P} + \frac{1}{k_E}\right]^{-1} = \frac{2}{\delta x_e}\left[\frac{k_E + k_P}{k_P k_E}\right]^{-1}$$

$$\frac{\delta x_e}{2} = \delta x_e^+ = \delta x_e^-$$

$$\frac{k_e}{\cancel{\delta x_e}} = \frac{k_P k_E}{k_E + k_P}\left(\frac{2}{\cancel{\delta x_e}}\right) \Rightarrow k_e = \frac{2 k_P k_E}{k_E + k_P} \Rightarrow \text{متوسط هارمونیک}$$

سؤال: اگر علاوه بر یکسان بودن δx ها، مقادیر k_P و k_E برابر باشند $\Leftarrow$

$$k_e = \frac{2k^2}{k+k} = \frac{2}{2}k = k$$

براساس عبارت متوسط هارمونیک:

$k_P = 0 \Rightarrow k_e \to 0$ — در محل P عایق داریم و هدایت نداریم

$k_P \gg k_E \Rightarrow k_e \to 2k_E$ — k_P بزرگ یعنی مقاومت حرارتی نخواهیم داشت و در ناحیه e تا E تفاوت های دمائی می افتند که در طبیعت فاصله P تا e را نیز پوشش می دهد.

اعمال غیرخطی شدن (Nonlinearity)

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + S = 0$$

$k = f(T)$
$S = h(T)$ → در این صورت مسئله غیرخطی خواهد شد در دستگاه جبری حاصل هم غیرخطی خواهد بود

→ علت بروز حل غیرخطی وجود K و S به صورت توابعی از T است

→ حل به روش های مستقیم دستگاه های غیرخطی

→ حل به روش ها دستگاه شبه خطی $\xrightarrow[\text{حل خطی}]{}$ یک روش تکراری گاوس سایدل
و سپس دستگاه خطی شده را حل می کنیم.

→ در این درس به این روش عمل می کنیم.

روش حل دستگاه غیرخطی

۱- مقادیر اولیه برای توزیع مجهول را فرض می کنیم (φ را در کل میدان یک مقدار مشخص فرض می کنیم) (مثلاً همه را ۱۰۰ می گذاریم)

۲- با مقادیر فرض شده ضرایب را تبدیل به اعداد معلوم می کنیم.

$$a_P\varphi_P = \sum a_{nb}\varphi_{nb} + b$$

۳- سیستم دستگاه خطی شده را با این ضرایب حل می کنیم.

۴- مقادیر بدست آمده برای φ در مرحله ۳ را با مقادیر مرحله قبل مقایسه می کنیم.

۵- در صورت کوچک بودن خطا از یک حد تعیین شده، مقادیر φ نهایی مشخص شده. وگرنه به مرحله ② با آخرین مقادیر بدست آمده برای φ برمی گردیم.

← همگرایی و حد خطاها را ما تعیین می کنیم

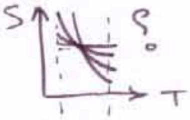
$$|\varphi^{i+1}-\varphi^{i}| \leqslant \varepsilon$$ حد تعیین شده

حداکثر خطای Singe Precision در محاسبات به مقدار 10^{-7} خواهد بود.

خطی سازی ترم چشمه

$$\bar S = S_C + S_P T_P$$

راه های متفاوتی برای یافتن S_P و S_C وجود دارد



$$a_P = a_E + a_W - S_P\Delta x \quad , \quad S_P \leqslant 0$$ شرط مهم

خطی سازی $\bar S$ را با شیب های متفاوتی می توانیم انجام دهیم، سوال این است بهترین شیب کدام است؟

پیشنهاد پاتانکار:

$$\bar S = \bar S^* + \left(\frac{dS}{dT}\right)^* (T_P - T_P^*)$$

مقدار سورس در نقطه P $T=T_P$

شیب منحنی بر حسب T در نقطه $T=T_P$

مقدار معلوم دما در نقطه P که از طریق iteration بدست آمده (از مرحله قبلی)

از iteration قبلی بدست آمده است

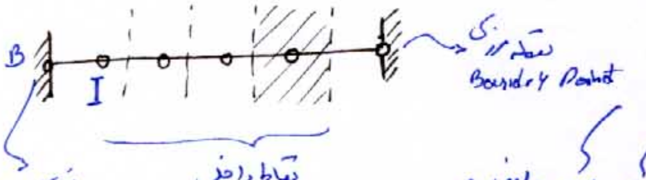
مثال ۱) $S = 4 - 5T^3 \xrightarrow{\text{پاتانکار}} \bar S = (4 - 5T_P^{*3}) + (-15T_P^{*2})(T_P - T_P^*)$ منظم کردن

$$\bar S = \underbrace{(4 + 10T_P^{*3})}_{S_C} - \underbrace{(15T_P^{*2})}_{S_P} T_P$$

که واضح است که همیشه ضریب T_P منفی است.

تحقیق: چرا پیشنهاد آقای پاتانکار مناسب ترین شکل ممکن است؟

شرایط مرزی



در اینجا تمهیدات لازم به شرایط مرزی می کنیم.

گفتیم به طور کلی سه دسته شرایط مرزی داریم (نیومن، دیریکله و شکل رابین)

ما معمولاً برای مسئله یک بعدی سه دسته شرایط مرزی را بررسی می کنیم.

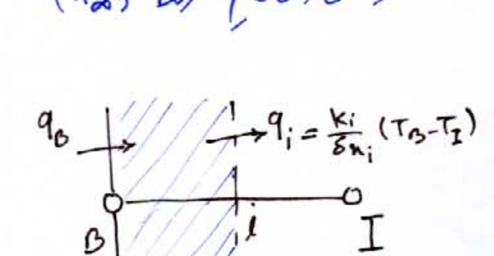
در اینجا نقطه کنار نقطه مرزی را با I نامگذاری می کنیم و خود نقطه مرزی را با B نامگذاری می کنیم. (نقاط میانی را با P نشان می دهیم)

در مسئله
① T_B معلوم باشد ← مشکلی وجود ندارد
② T_B مجهول باشد
- یا فلاکس روی مرز مشخص است (q_B)
- یا در کنار مرز ما سیال داریم که کانوکشن را می دانیم. (h_∞, T_∞)

در حالت ② یک معادله اضافه نیاز داریم.

یعنی باید T_B را به شکلی حساب کنیم

ما باید q_B را بدانیم در ② q_B به صورت شار معلوم است یا اینکه خود را باید از روی h_∞ و T_∞ آن را حساب کنیم.



$$q_B - q_i + \underbrace{(S_c + S_p T_B)}_{\bar{S}} \Delta x = 0 \qquad \Delta x \times 1 \times 1$$

$$q_i = \frac{k_i}{(\delta x)_i}(T_B - T_I)$$

اگر q_B معلوم باشد ←

$$a_B T_B = a_I T_I + b$$

ضرایب
$$a_I = \frac{k_i}{(\delta x)_i}, \quad b = S_c \Delta x + q_B$$
$$a_B = a_I - S_p \Delta x$$

⇐ خواسته‌ها را باید حفظ کنیم. و رابطه خطی شده را معادل سازی کنیم.

اگر h_∞ و T_∞ را داشته باشیم ←

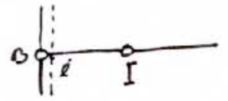
قانون سرمایش نیوتن
$$q_B = h_B(T_f - T_B) \qquad a_B T_B = a_I T_I + b$$

ضرایب
$$a_I = \frac{k_i}{(\delta x)_i}, \quad b = S_c \Delta x + h T_f$$
$$a_B = a_I - S_p \Delta x + h$$

سؤال) اگر روی مرز جسم تشعشع داشتیم چه اتفاقی می افتد؟

نکات شرایط مرزی

- نقطه‌ی i فرقی ندارد که در فاصله‌ی بین دو نقطه B و I وسط باشد.
ممکن است i خیلی نزدیک به B باشد



- گاهی اوقات ممکن است i در جایی باشد که حجم کنترل مرزی برابر با صفر شود.
(این به آن برمی‌گردد که اول حجم کنترل‌ها را چیدیم یا اول نقاط را ؟)

تا اینجای کار معادلات خطی را بدست آوردیم که گسسته شده و قابل بیان به شکل ماتریس هستند.

از اینجا به بعد هدف حل این دستگاه معادلات است.

حل معادلات گسسته شده

ماتریس ضرایب در حل یک‌بعدی به‌عبارتی به شکل سه قطری است و بقیه عناصر آن صفر است

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b = a_E \phi_W + a_W \phi_W + b$$

✓ روش برمبنای شبه خطی‌سازی است و در هر تکرار باید دستگاه جبری خطی حل شود ما داریم اگر دستگاه غیرخطی بوده باشد.

$$\begin{bmatrix} \diagdown\diagdown\diagdown \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{Bmatrix}$$

ماتریس ضرایب — بردار مجهول (جواب‌ها) — ضرایب ثابت یا معلوم

قطرهای اصلی که مربوط به ضرایب a_P و a_{nb} هستند

روش حل دستگاه جبری:
- روش مستقیم
  - معکوس کردن
  - حذفی گوس
- روش غیرمستقیم
  - ژاکوبی
  - نقطه به نقطه گوس سایدل

در روش‌های مستقیم ما تمام ضرایب را ذخیره کنیم (n×n) یعنی n^2 متغیر

در روش غیرمستقیم هر بار فقط به عنصر غیرصفر نیاز خواهیم داشت و از این نظر حجم محاسبات کمتر است.

بر اساس الگوریتم تکرار فرآیند انجام می‌شود.

✓ برنامه‌هایی که می‌نویسیم بر اساس روش‌های غیرمستقیم است.

✓ مشکل روش‌های غیرمستقیم طولانی بودن همگرایی در برخی مواقع است

روش TDMA (Tri diagonal matrix algorithm)

این روش غیرمستقیم ابداع آقای تامسون است.

این روش کمک می‌کند خطی سه‌قطری و با جایگذاری‌های مکرر ماتریس‌های سه‌قطری را حل کنیم (کاربرد در مسائل یک بعدی)

روش TDMA برای مسائل یک بعدی یک روش مستقیم عمل می‌کند و برای مسائل دو و سه بعدی قابل تعمیم و بصورت تکرار است

برای یک مسئله یک بعدی داریم:

$i-1 \quad i \quad i+1 \quad \dots\dots$

$i=1 \qquad\qquad\qquad i=N$

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + b$$

for point i: $a_i \varphi_i = b_i \varphi_{i+1} + c_i \varphi_{i-1} + d_i$

for first point $\quad c_1 = 0$

for last point $\quad b_N = 0$

$$i=1 \begin{cases} a_1 \varphi_1 = b_1 \varphi_2 + d_1 \\ \varphi_1 = \dfrac{b_1}{a_1} \varphi_2 + \dfrac{d_1}{a_1} \end{cases}$$

$$i=2 \begin{cases} a_2 \varphi_2 = b_2 \varphi_3 + c_2 \varphi_1 + d_2 \\ a_2 \varphi_2 = b_2 \varphi_3 + c_2 \left[\dfrac{b_2}{a_1} \varphi_2 + \dfrac{d_1}{a_1}\right] + d_2 \\ \varphi_2 = \dfrac{b_2}{a_2} \varphi_3 + \dots \end{cases}$$

با جایگذاری از $i=1$ داریم

φ_2 بر حسب φ_3 می‌شود.

خلاصه الگوریتم:

1. P_1 و Q_1 را حساب می‌کنیم.
2. P_i و Q_i را برای $N, \dots, 2, 1$ حساب می‌کنیم.
3. $T_N = Q_N$ داریم.
4. از طریق رابطه کلی از $N-1$ شروع می‌کنیم تا $i=1$ تا بتوانیم T_{N-1} و T_{N-2} و ... و T_3 و T_2 و T_1 را حساب کنیم.

بطور کلی $\quad \varphi_i = P_i \varphi_{i+1} + Q_i$

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}$$

$$\text{if } i=1 \Rightarrow P_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

نحوه محاسبه P و Q ؟

فرض (می‌دانیم) $\quad a_i \varphi_i = b_i \varphi_{i+1} + c_i \varphi_{i-1} + d_i \quad (1)$

هدف $\Rightarrow \varphi_i = P_i \varphi_{i+1} + Q_i \quad (2)$

کافیست از (2) مقدار φ_{i-1} را حساب کنیم و در (1) جایگذاری کنیم.

$\varphi_{i-1} = P_{i-1} \varphi_i + Q_{i-1} \quad (3)$

جایگذاری (3) در (1) $\Rightarrow a_i \varphi_i = b_i \varphi_{i+1} + c_i (P_{i-1} \varphi_i + Q_{i-1}) + d_i$

$$\varphi_i = \frac{b_i}{a_i} \varphi_{i+1} + \frac{c_i}{a_i} (P_{i-1} \varphi_i + Q_{i-1}) + \frac{d_i}{a}$$

مرتب کردن و شبیه معادله (2) می‌کنیم

$$\varphi_i = \underbrace{\frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}}_{P_i} \varphi_{i+1} + \underbrace{\frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}}_{Q_i}$$

تمرین: برنامه TDMA را بنویسید

تمرین: الگوریتم توماس را برای ماتریس ۵ قطری تعمیم دهید

εV

```
#include <iostream.h>

float TDMA(float aw[100],float ap[100],float ae[100],float d[100],int n)
{
float t[100];
int i;
float p[100],q[100];
p[0]=(ae[0]/ap[0]);q[0]=(d[0]/ap[0]);
for(i=1;i<=n-1;++i)
        {
        p[i]=ae[i]/(ap[i]-aw[i]*p[i-1]);
        q[i]=(d[i]-(aw[i]*q[i-1]))/(ap[i]-(aw[i]*p[i-1]));
        }
        t[n-1]=q[n-1];
        for(i=n-1;i>=0;--i)
        {
        t[i]=q[i]-(p[i]*(t[i+1]));
        cout<<"T"<<i<<" = "<<t[i]<<endl;
        }
}
void main()
{
int n;
cout<<"input nodes : ";cin>>n;
float a_w[100],a_p[100],a_e[100],d_[100];
int i;
float input;
for(i=0;i<=n-1;++i)
{
cout<<"Enter aw"<<i<<" ? : ";cin>>a_w[i];
cout<<"Enter ap"<<i<<" ? : ";cin>>a_p[i];
cout<<"Enter ae"<<i<<" ? : ";cin>>a_e[i];
cout<<"Enter d"<<i<<" ? : ";cin>>d_[i];
}
TDMA(a_w,a_p,a_e,d_,n);
}
```

مسائل هدایت غیردائمی

تا اینجا در مورد تقریبات مسأله هدایت یک بعدی دائمی و با ترم سورس صحبت کردیم و در مورد تقریب مشتق و تقریب K صحبت کردیم
(همچنین تقریب چشمه را بررسی کردیم)

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\dot q}{k}$$

معادله هدایت برای جسم فلزی (k ثابت) و بدون چشمه

حال به یک مسأله هدایت یک بعدی غیردائمی بدون سورس (برای راحتی بیان کردن بررسی نمی‌کنیم چون قبلاً بررسی کردیم) می‌پردازیم

$$\begin{cases} \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) \\ \rho c = \text{Constant} \end{cases}$$

→ معادله هدایت یک بعدی غیردائمی و بدون سورس (منبع)

می‌خواهیم این معادله را گسسته کنیم (به معادله جبری تبدیل کنیم)

ما باید مارچینگ را در طول زمان انجام دهیم.

به شرایط اولیه و شرایط مرزی نیاز است.

روش حل، روش قدم زدن یا marching است که از شرایط اولیه شروع و برای حل در یک قدم زمانی بعد اقدام می‌کنیم.

$$IC \xrightarrow[\text{یک قدم جلو}]{\Delta t} \text{توزیع دما را حساب کنیم} \xrightarrow[\text{یک قدم جلو}]{\Delta t} \text{توزیع دما را حساب کنیم} \longrightarrow \cdots$$

IC

initial condition

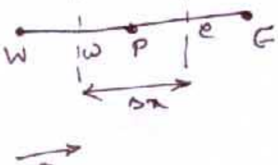
نکته مهم این است که توزیع دما در هر مرحله به عنوان IC (شرایط مرزی و اولیه) مرحله‌ی بعد به حساب می‌آید.

فرض کنیم در لحظه‌ی t مقادیر معلوم باشد، مقادیر معلوم را با اندیس 0 نشان می‌دهیم. در لحظه‌ی t+Δt مقادیر را با اندیس 1 نشان می‌دهیم.

$@t \rightarrow T_P^0, T_E^0, T_W^0$

$@t+\Delta t \rightarrow T_P^1, T_E^1, T_W^1$

(در مکان نوشتن P، W، E را حفظ می‌کنیم)



حال از معادله انتگرال دوگانه می‌گیریم و ...

$$\int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\, dt\, dx = \int_t^{t+\Delta t}\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\, dt$$

حال به جزء سازی ترم سمت چپ تساوی (LHS) و ترم سمت راست تساوی (RHS) می‌پردازیم

Right hand Side

left hand Side

برای LHS (ترم سمت چپ تساوی) :

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt\, dx$$

انتگرال زمانی ← فرض می‌کنیم که در هر قدم زمانی، مقدار مجهول (T) در هر نقطه از شبکه در کل حجم کنترل صادق باشد

که در فضا و ثابت در نظر گرفتیم

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt = T\Big]_t^{t+\Delta t} \Rightarrow T_{t+\Delta t} - T_t = T_P^1 - T_P^0$$

انتگرال مکانی ←

$$L.H.S = \rho c\left[\int_w^e (T_P^1 - T_P^0)\, dx\right] = \rho c\, \Delta x\, (T_P^1 - T_P^0)$$

برای R.H.S (ترم سمت راست تساوی)

$$\int_t^{t+\Delta t}\left[\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\right] dt = \int_t^{t+\Delta t}\left[\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right] dt$$

← قبلاً تخمین زدیم

$$= \int_t^{t+\Delta t}\left[\left(k_e\frac{T_E - T_P}{\delta x_e}\right) - \left(k_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w}\right)\right]$$

حال انتگرال را می‌شکنیم :

مسئله :

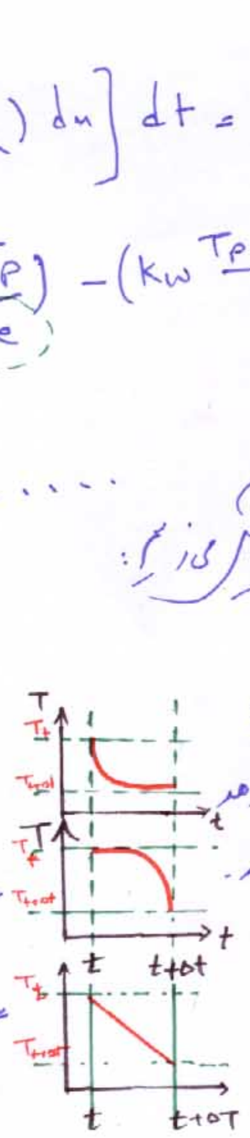
$$\frac{k_e}{\Delta x_e}\int_t^{t+\Delta t} T_E\, dt + \cdots$$

در این ترم چون از T_E چیزی نمی‌دانیم یک تخمین برایش می‌زنیم:

(تخمین برای T برحسب t (در جهت زمان))

$T_E = f(t)$

ما دنبال این هستیم بفهمیم دما در یک Δt چگونه تغییر می‌کند



فرض ① عمده تغییرات دمای ما در ابتدای Δt رخ می‌دهد ← یعنی ما در کل Δt، دما را برابر نقطه انتهایی فرض می‌کنیم

فرض ② عمده تغییرات دمای ما در انتهای Δt رخ می‌دهد. ← یعنی در کل Δt، دما را برابر با مقدار ابتدایی فرض می‌کنیم

فرض ③ تغییرات دمای ما یک مقدار خطی در Δt باشد ← یعنی دمایی که در نظر می‌گیریم میانگین دمای ابتدایی و انتهایی باشد

تخمین T در فاصله‌ی Δt :

فرض ① به نام implicite است که $T = T^0$ خواهد شد

فرض ② به نام explicit است که $T = T^1$ خواهد شد

فرض ③ به نام Crank-Nikolson است که $T = \frac{T^1+T^0}{2}$ خواهد شد.

✓ با در نظر گرفتن شرط غیر دائمی بودن معادله جبری باید شکل زیر را پیدا کند

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_P^\circ T_P^\circ + b$$

قرار شد جای T_i (T_E یا T_P یا T_W) تابع تخمینی را قرار دهیم

$$\int_t^{t+\Delta t} T_i \, dt = ?$$

با اعمال تخمین های ۱ تا ۳ (براساس نوع مسئله) داریم:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_i \, dt = \left[f T_i^1 + (1-f) T_i^\circ \right] \Delta t$$

فرم کلی تخمین

$f = 0 \rightarrow$ F.E (full explicit)

$f = 1 \rightarrow$ F.I (full implicite)

$f = 0.5 \rightarrow$ C.N (crank-nikolson)

$\Leftarrow$ به ازای f های مختلف تخمین های مختلف خواهیم داشت

رابطه ی R.H.S با جایگذاری فرم کلی فوق، شکل زیر می شود:

$$R.H.S = f\left[k_e \frac{(T_E^1 - T_P^1)}{\delta x_e} - k_w \frac{(T_P^1 - T_W)}{\delta x_w} \right] + (1-f)\left[k_e \frac{(T_E^\circ - T_P^\circ)}{\delta x_e} - k_w \frac{(T_P^\circ - T_W^\circ)}{\delta x_w} \right]$$

$$a_P T_P = a_E\left[f T_E + (1-f) T_E^\circ \right] + a_W \left[f T_W + (1-f) T_W^\circ \right] + \left[a_P^\circ - (1-f) a_E - (1-f) a_W \right] T_P^\circ$$

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}, \quad a_W = \frac{k_w}{\delta x_w}, \quad a_P^\circ = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t}, \quad a_P = f a_E + f a_W + a_P^\circ$$

حال با جایگذاری f می توانیم به تخمین های مختلف دست یابیم

← واضح است که یک نقطه در همسایه ی مکانی و سه همسایه ی زمانی دارد

✓ یک نقطه سه همسایه دارد

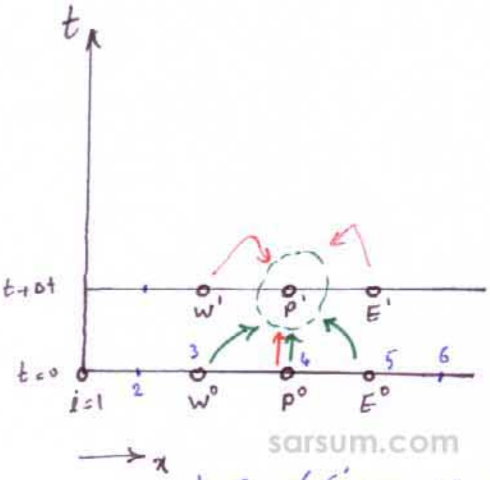
روش صریح $f = 0 \Rightarrow a_P T_P = a_E T_E^\circ + a_W T_W^\circ + (a_P^\circ - a_E - a_W) T_P^\circ$

✓ یک نقطه سه همسایه دارد ولی نیاز به حل است و دوتا مجهولی است

روش ضمنی $f = 1 \Rightarrow a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_P^\circ T_P^\circ$

روش کرنک نیکلسون $f = \frac{1}{2} \Rightarrow a_P T_P = \frac{1}{2}\left(a_E T_E + a_E T_E^\circ + a_W T_W + a_W T_W^\circ + (2a_P - a_E - a_W) T_P^\circ \right)$

✓ یک نقطه سه همسایه دارد



مثلاً ماتس نحوه‌ی ورود جهت مارچ کردن در طول زمان و در مکان‌ها متفاوت است.

فرض میکنیم میله‌ای داریم که در هوای آزاد قرار داده‌ایم، هدف ما حل مسئله در لحظات بعد است. (لحظه‌ی اول معلوم است)

مقادیر دما در تمام نقاط در لحظه‌ی $t=0$ معلوم است (شرط اولیه)

ما در لحظه‌ی $t+\Delta t$ به همان تعداد نقاط داریم اما علاوه بر مجهول‌های نقاط E و W حالا نقطه‌ی $P_{t+\Delta t}$ (P^1) مجهول زمانی هم دارد که بستگی به زمان قبلی هستند.

✓ در روش صریح Explicit:

$$a_P T_P = a_E T_E^0 + a_W T_W^0 + (a_P^0 - a_E^0 - a_W) T_P^0 \quad *$$

مقدار تابع در هر نقطه فقط وابسته به مقادیر تابع در لحظه‌ی قبل است. (از اول معلوم است که فقط T های old نیاز است)

منطق حل این است که از اولین نقطه شروع کنیم و مقدار تابع را برای هر نقطه حساب کنیم

نتیجه: در حقیقت در لحظه‌ی فعلی تابع مجهول ما در هر نقطه به صورت کاملاً صریح به نقاط معلوم در لحظه‌ی قبل وابسته است

✓ در روش ضمنی implicit:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_P^0 T_P^0 \quad *$$

در هر لحظه مقدار تابع مجهول به نقاط مجاور و لحظه‌ی قبل همان نقطه وابسته است.

پس در هر مرحله زمانی مجبوریم یک دستگاه معادلات را حل کنیم، چون در هر لحظه تابع ما وابسته به نقاط مجهول اطراف است و دلیل این روش را ضمنی می‌نامند. (چون در هر لحظه مقدار تابع وابسته به مقادیر غیرمعلوم است)

ما در هر Time Step باید یک دستگاه معادلات را حل کنیم. (در روش صریح اینطور نبود)

هرکدام از این دو روش فواید و مشکلاتی دارند. دیده شد که روش صریح ساده‌تر، کم هزینه‌تر و سریع‌تر است و نیاز به حل دستگاه معادلات در هر Time Step نیست. اما مشکلی هم وجود دارد. مشکل بزرگ ضریب T_P^0 است که ممکن است منفی شود و شرط مثبت بودن ضرایب را زیر پا بگذارد.

✓ روش fully implicit در زمان دقت مرتبه‌ی 1 دارد

در ضریب T_P° منفی شود، مسلماً مثبت بودن ضرایب نقض شده و باعث ناپایداری جواب می‌شود

پس روش صریح تحت شرایطی ممکن است به ناپایداری بینجامد. $a_P^\circ - a_E - a_W > 0$ (به دلیل ضرایب مثبت)

$$\frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} - \frac{k_e}{\delta x_e} - \frac{k_w}{\delta x_w} > 0 \Longrightarrow \Delta t < \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2K}$$

شرط پایداری (فرض $k = k_e = k_w$)

یعنی Δt انتخابی برای حل معادلات از $\frac{\rho c (\Delta x)^2}{2K}$ کوچکتر باشد. Δx دقت ما را مشخص می‌کند یعنی هر چه تعداد نقاط بیشتر باشد Δx کوچکتر خواهد بود. اما اگر Δx خیلی کوچک باشد، برای برقراری شرط پایداری فوق Δt خیلی خیلی باید کوچک شود که مشکل‌ساز خواهد بود. (تعداد Time Step ها فوق العاده زیاد خواهد شد)

✓ پس روش explicit پایداری مشروط دارد. و شرط پایداری هم $\Delta t < \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2K}$ است.

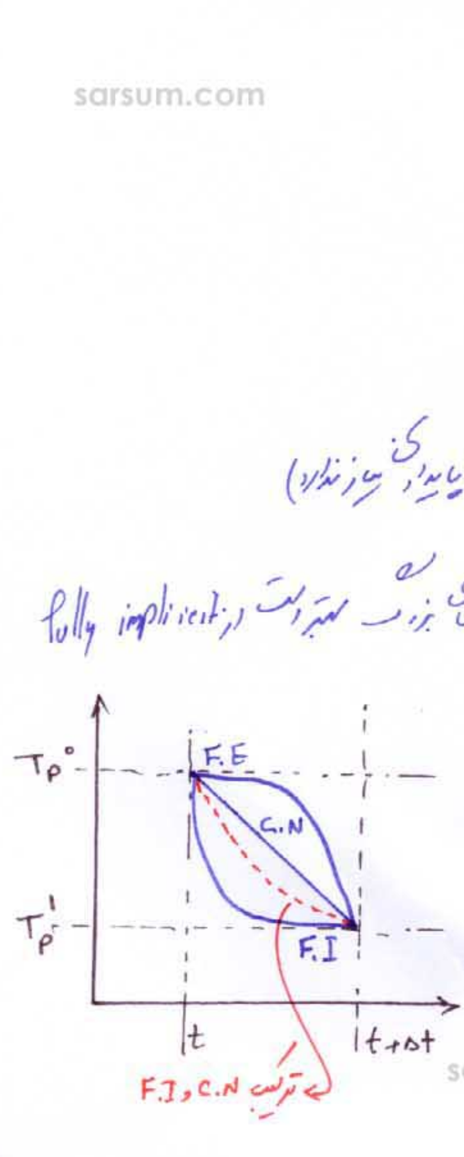
✓ در روش ضمنی ما هیچ شرطی نداریم و بدون شرط پایدار است.

← ما باید بین روش ضمنی و صریح یکی را انتخاب کنیم و این مربوط به مسأله و شرایط دارد.

✓ روش C.N تحت شرایطی پایدار و تحت شرایطی ناپایدار است.

✓ پیشنهاد آقای پاتانکار استفاده از روش fully implicit است (چون شرط پایداری نیاز ندارد)

✓ برای Δt های کوچک روش ضمنی به دقت کرنک نیکلسون نخواهد بود. برای Δt های بزرگ معتبر است از fully implicit استفاده شود.



نتیجه: Δt کوچک ← روش تخمینی کرنک نیکلسون

Δt بزرگ ← روش ضمنی

یک ترکیب مناسب از کرنک نیکلسون و ضمنی حالت‌های میانی است.

در این مورد بعداً توضیح داده خواهد شد.

پس بطور کلی برای شرایط یک بعدی، همراه سورس و بصورت غیر دائمی داریم:

$$
\begin{aligned}
& a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \\
& a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} , \quad a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} , \quad a_P = a_E + a_W + a_P^{\circ} - S_P \Delta x \\
& a_P^{\circ} = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} , \quad b = S_c \Delta x + a_P^{\circ} T_P^{\circ}
\end{aligned}
$$

نکته مهم: می‌توان برنامه‌ای را برای شرایط unsteady نوشت و حالت steady state را هم با آن حل کرد. کافیست مقدار Δt را یک عدد بزرگ (مثلاً 10^8) وارد کنیم، خود به خود معادلات شبه حالت دائمی می‌شود.

$\Delta t \nearrow^{\infty} \Rightarrow a_P^{\circ} = 0 \Rightarrow$ معادلات شبه حالت دائمی می‌شود.

بعداً خواهیم دید حل مسائل steady به کمک روش unsteady بهتر جواب می‌دهد.

(در برخی جریان‌های دارنیر، اینگونه است و همگرائی نداریم [در حل به روش steady] پس از روش unsteady آن را حل می‌کنیم)

ما اکنون می‌توانیم یک برنامه کامپیوتری بنویسیم که مسأله هدایت یک بعدی همراه سورس و بصورت غیردائمی را حل کند. برای این کار:

۱- تولید شبکه (در جهت تغییرات نقاطی را مشخص کنیم) (Δx ها را در یک آرایه می‌ریزیم)

۲- برای هر C.V (حجم کنترل) ضرایب معادله‌ی فوق را حساب کند (a_E، a_W و a_P و a_P°) (و در یک آرایه ذخیره کند)

۳- معادله یک تابع برای حل معادلات جبری خطی داشته باشد (به روش TDMA)

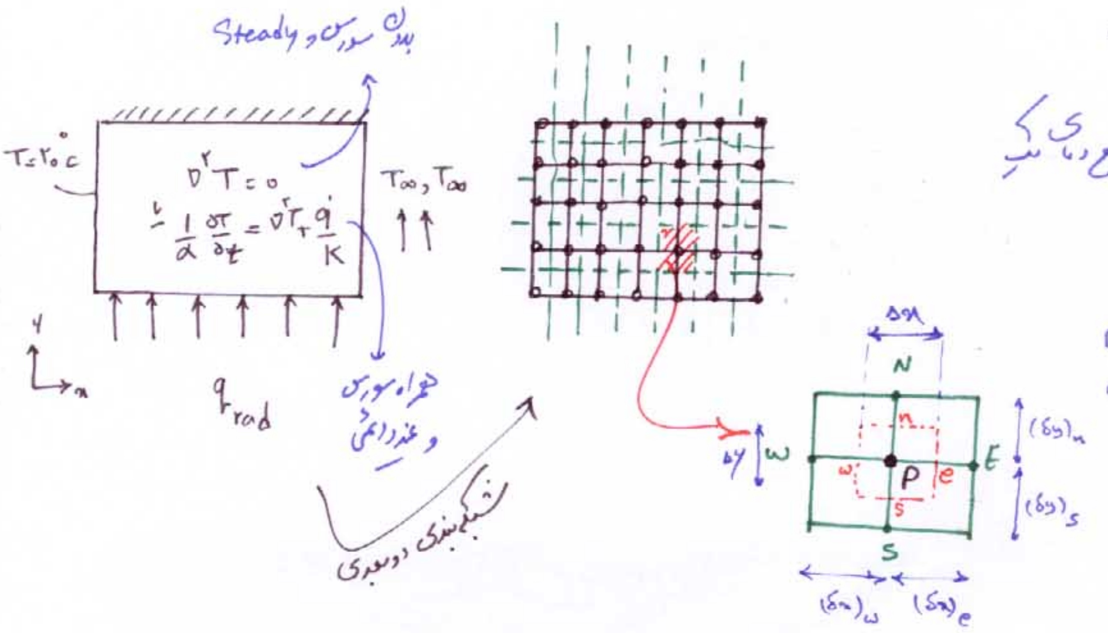
۴- برنامه بتواند بصورت Iteration عمل کند، یعنی اگر معادلات جبری ما غیرخطی شد بتواند آن را شبه خطی کند (یک مقدار اولیه فرض کند، ضرایب که وابسته‌اند چون دستشان تبدیل به عدد می‌شود و دستگاه معادلات خطی شده، را حل کند و جواب این حل را با قبلی مقایسه کند [با توجه به یک تابع خطا])

نکته: ضرائب Γ (ضریب دیفیوژن) باید به طرز صحیح در interface ها محاسبه شود (k_w و k_e) (روش متوسط هارمونیک)

حل مسائل دو بعدی

هدف بدست آوردن توزیع دمای یک جسم دو بعدی است.

ابتدا شبکه بندی می کنیم و از نامگذاری برای هر C.V استفاده می کنیم.



حال معادله را گسسته سازی می کنیم. ابتدا از معادله انتگرال می گیریم:

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\int_e^w \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}\,dx\,dy\,dt = \int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\int_e^w \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dt + \int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\int_e^w \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,dx\,dy\,dt + \int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\int_e^w S\,dx\,dy\,dt$$

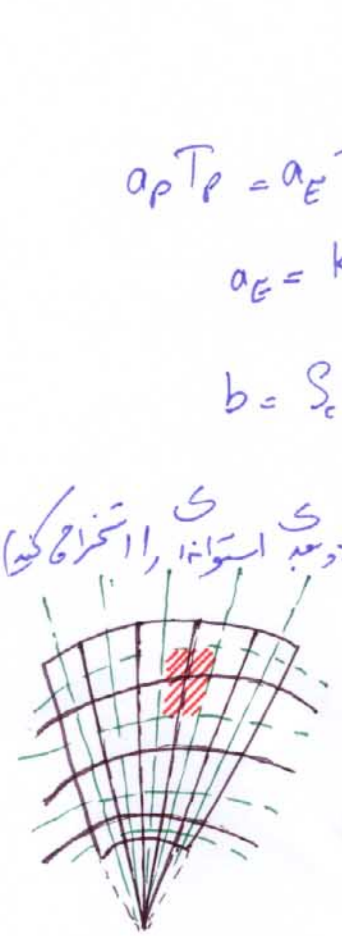
با استفاده از انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + a_P^0 T_P^0 + b$$

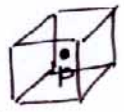
$$a_E = k_e \frac{\Delta y}{(\delta x)_e} \xrightarrow{} \Delta y \times 1 , \quad a_N = k_n \frac{\Delta x}{(\delta y)_n} , \quad a_P^0 = (\rho c)\frac{(\Delta x \Delta y)}{\Delta t} \xrightarrow{} \Delta x \Delta y \times 1$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0 , \quad a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y$$

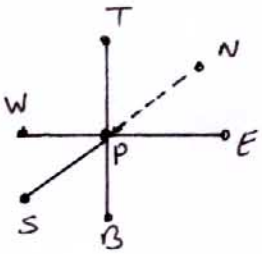
تمرین: معادله ی بالا را از طریق انتگرال گیری ترتیبی استخراج کنید (همچنین دو بعدی استوانه ای را استخراج کنید)



حل مسائل سه بعدی



سطوح حجم کنترل



$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N + a_B T_B + a_T T_T + b$$

$$a_E = k_e \frac{\Delta y \Delta z}{(\delta x)_e}, \quad a_N = k_n \frac{\Delta x \Delta z}{(\delta y)_n}, \quad a_W = k_w \frac{\Delta y \Delta z}{(\delta x)_w}$$

$$a_S = k_s \frac{\Delta x \Delta z}{(\delta y)_s}, \quad a_T = k_t \frac{\Delta x \Delta y}{(\delta z)_t}, \quad a_B = k_b \frac{\Delta x \Delta y}{(\delta z)_b}$$

$$a_P^\circ = \rho c \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}, \quad b = S_c \Delta x \Delta y \Delta z + a_P^\circ T_P^\circ$$

$$a_P = \sum a_{nb} + a_P^\circ - S_P \Delta x \Delta y \Delta z$$

$a_P^\circ T_P^\circ$ یعنی چه؟ معنای انرژی داخلی داخل حجم کنترل است برمبنای زمان

$\rho c \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} \times T_P^\circ$ ← $mc\Delta T$

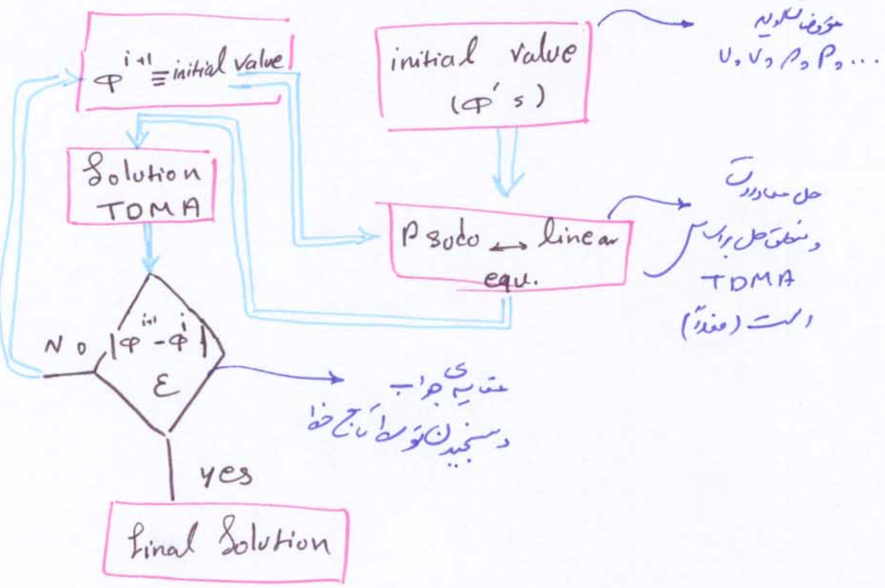
b یعنی چه؟ مجموع سورس هاست.

$$b = \underbrace{S_c \Delta x \Delta y \Delta z}_{\text{سهمی از سورس در داخل C.V}} + \underbrace{a_P^\circ T_P^\circ}_{S_P \text{ مستتر در}}$$

سورس: انرژی تولیدی

در سطح

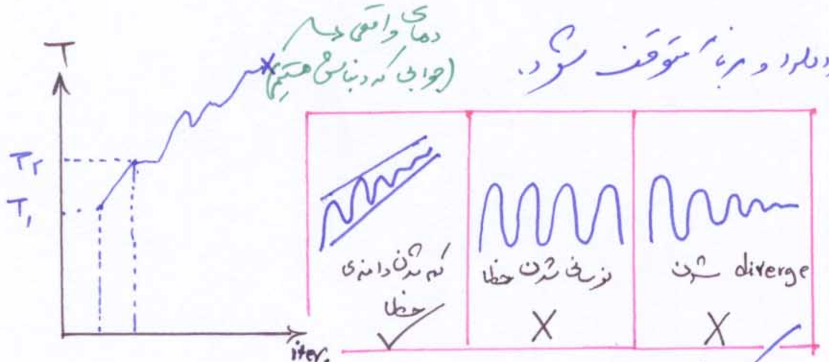
فرآیند حل معادلات



نکته: فرض برای iteration اول یک دما دلخواه داشته باشیم که حدس اولیه ماست، حال ضرایب معادلات را حساب می کنیم (a_p و a_E و ...) و طبق روش TDMA مقادیر جدید دما را حساب می کنیم. مثلاً در iteration دوم دمای ما T_2 می شود.

فرض جواب واقعی همان چیزی باشد که در شکل نشان داده شده است، و هدف داریم با تعدادی تکرار به آن جواب واقعی برسیم، انتظار داریم، دامنه ی خطا هر دفعه کم و کمتر شود. ولی ممکن است نوسان کند و به جواب نرسیم

همچنین امکان diverge شدن وجود دارد و برنامه متوقف شود.



ما باید سعی کنیم تا تغییرات از یک تکرار به تکرار دیگر را کنترل کنیم.

استراتژی ما کنترل تغییر مقادیر مجهولات در تکرارها است.

فرآیند under relaxation یا زیر تخفیف، به نوعی میزان تغییرات توابع مجهول را در تکراری به تکرار دیگر کند می کند. (کم می کند) یعنی اجازه نمی دهد دامنه ی نوسانات زیاد شود.

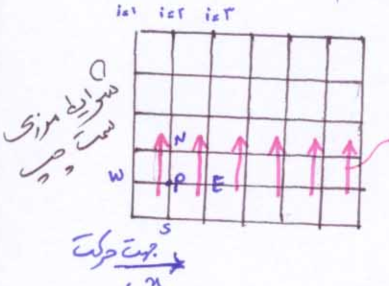
← این فرآیند، فرآیند تکرار پذیری نیست یعنی اینطور نیست که اگر برای یک مسئله صادق باشد برای مسائل دیگر هم قابل تکرار باشد حتی روی یک مسأله هم قابل تکرار نیست (مثلاً اگر شرایط مرزی، یا شرایط اولیه تغییر کند نمی توان از این روش استفاده کرد)

نکاتی در مورد TDMA

انواع مسائل:

- مسائل یک بعدی ← TDMA ماتریس سه قطری
- مسائل دو بعدی
  - الگوریتم TDMA را برای دو بعدی تعمیم می‌دهیم.
  - از خود TDMA استفاده شود (line by line)
- مسائل سه بعدی
  - مانند دو بعدی
  - از خود TDMA استفاده شود (Plane by Plane)

روش line by line:



حدس اولیه برای کل نقاط، سپس در جهت x مسأله دو بعدی را به مسئله یک بعدی در جهت y تبدیل می‌کنیم.

مثلاً برای i=1، چون T_E و T_W معلوم است. پس نقطه P تنها به نقاط بالایی و پایینی مربوط است. در واقع مسئله را یک بعدی در نظر گرفته و با استفاده از TDMA حل کنیم، مقادیر این خط (i=1) را بدست آورده و در حافظه می‌ریزیم. حال برای خط i=2 همین کار را تکرار می‌کنیم. (همسایه سمت چپی را که قبلاً حل کردیم و همسایه سمت راستی هم حدس اولیه هست) حال برای i=3 می‌توانیم TDMA را اعمال کنیم. این کار را برای i=4 و i=5 ... تکرار می‌کنیم.

← ما با این کار یک بار میدان حل را در جهت x، Sweep (جاروب) کرده‌ایم. در واقع اثرات شرایط مرزی سمت چپ وارد میدان شده است. (مرحله به مرحله در میدان اثرش وارد می‌شود) شرایط مرزی بالا و پایین هم از طریق حرکت ما در جهت پایین به بالا وارد میدان می‌شود.

به طور کلی شرایط مرزی سمت چپ (boundary condition) با یکبار جاروب کردن میدان از سمت چپ به راست تأثیرشان روی میدان اعمال می‌شود.

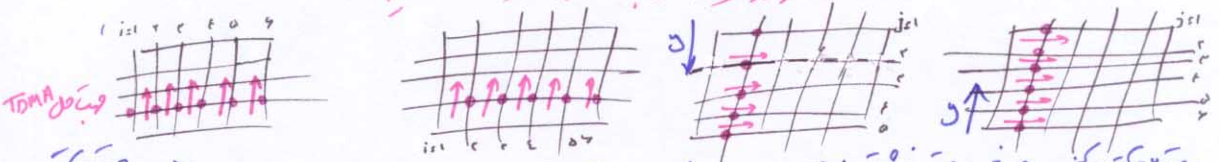
برای وارد کردن تأثیر شرایط سمت راست باید یکبار از سمت راست به چپ مسئله را به همان شکل قبلی حل کنیم. برای وارد کردن شرایط مرزی بالا و پایین هم یکبار در جهت y از بالا به پایین و بار دیگر از پایین به بالا میدان مسأله را جاروب می‌کنیم.

یک Sweep کامل یعنی جاروب کردن میدان در جهت x از چپ به راست و سپس از راست به چپ و همچنین جاروب کردن میدان در جهت y یکبار از بالا به پایین و بار دیگر از پایین به بالا.

بر اساس تمام نقاط باید جواب‌ها را با Sweep قبلی چک کرد. اگر ارضا نشد باید یکبار دیگر جاروب کرد.

بطور کلی داریم:

TDMA را در هر مرحله در جهت فلش برای هر نقطه اعمال می‌کنیم.



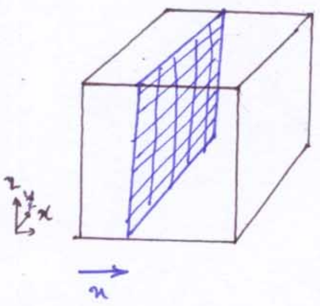
جهت حرکت x

در جهت x حرکت می‌کنیم و در هر i در جهت فلش قرمز TDMA را اعمال می‌کنیم.

در جهت y حرکت می‌کنیم و در هر j در جهت فلش قرمز TDMA را اعمال می‌کنیم.

← مراحل بالا یک sweep کامل را نشان می‌دهد

در حالت سه بعدی نیز می‌توان روش sweep کردن را تعمیم داد، که به آن plane by plane می‌گویند.



مثلاً با توجه به شکل روبرو ابتدا صفحات x=k و k=0,1,2,... را مرحله به مرحله انتخاب می‌کنیم.

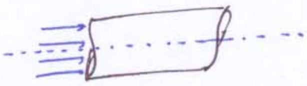
روی هر صفحه line by line را انجام می‌دهیم. سپس به صفحه‌ی بعد می‌رویم.

تا اینکه یک بار به طور رفت و برگشت در جهت x، sweep را انجام دهیم.

برای جهت‌های y و z هم همین کار را تکرار می‌کنیم.

سؤال: آیا همیشه به sweep در تمام جهات نیاز است؟

در برخی مسائل جهت غالب وجود دارد. مثلاً در جریان داخل لوله (با conduction در یک دیواره متفاوت است)



چون شرط مرزی پایین دست نداریم و سرعت و ... را بالادست جزء مقادیر معلوم است.

جهت غالب انتقال اطلاعات از چپ به راست است و ما فقط نیاز به sweep از چپ به راست هستیم.

✓ تغییر راستای جاروب کردن بر این اساس انجام می‌شود که شرایط مرزی در همه‌ی مرزها هرچه سریع‌تر وارد نقاط داخلی شود.

برای تسریع همگرایی بهتر است، در راستای ضرایب بزرگ، TDMA به کار برده شود.

ترتیب sweep مهم است، در جهتی که اطلاعات معلوم وجود دارد یا راستایی که کانوکشن قوی وجود دارد

مسئله under-relaxation

در روش تکرار حل معادلات جبری برای ترم های غیرخطی گاهی اوقات نیاز به افزایش یا کاهش تغییرات از تکراری به تکرار دیگر خواهیم داشت. برای این کار از دو روش عملی زیر استفاده می کنیم

۱- روش استفاده از فاکتور تخفیف به روش صریح

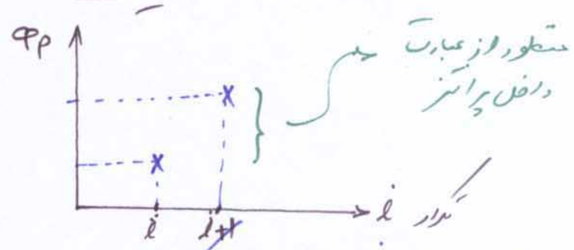
می دانیم $a_P\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b$

$$\phi_P = \left(\sum a_{nb}\phi_{nb}+b\right)/a_P$$

فرض $\phi_P^* =$ مقدار ϕ_P در تکرار قبل (مقدار معلوم)

اضافه و کم کردن ϕ_P^*

$$\phi_P = \phi_P^* + \Big(\underbrace{\frac{\sum a_{nb}\phi_{nb}+b}{a_P}}_{\text{جواب جدید در تکرار } i+1} - \phi_P^*\Big)$$



تفاضل داخل پرانتز نشان می دهد که چقدر مقدار ϕ از یک تکرار به تکرار دیگر تغییر کرده است.

برای کنترل این تفاضل می توان آن را در ضریبی ضرب کرد.

عبارت داخل پرانتز تغییر در مقدار ϕ به دلیل انجام تکرار جاری را نشان می دهد که می توان با اعمال فاکتور تخفیف این تغییر را به دلخواه کنترل کرد (فاکتور تخفیف را با α نشان می دهند)

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha\left(\frac{\sum a_{nb}\phi_{nb}+b}{a_P} - \phi_P^*\right)$$

حال α را به دو شکل می توان اعمال کرد که یکی همین روش فوق است (روش صریح) α روی تغییر مقدار ϕ در دو تکرار پشت سر هم اعمال می شود.

یعنی مثلاً ϕ در مختصات (۳،۵) مد نظر است. فرض در iteration شماره ی ۱۰ هستیم. ϕ را در این iteration حل می کنیم. حاصل را منهای مقدار ϕ در iteration شماره ی ۹ می کنیم. (ϕ_P^*) و حاصل را در α ضرب می کنیم و با مقدار ϕ_P^* (مقدار ϕ در iter. شماره ۹) جمع می کنیم. حاصل می شود ϕ در نقطه ی (۵،۳) در تکرار دهم.

به این عملیات روش صریح گفته می شود

۲ - روش استفاده از فاکتور تخفیف به روش ضمنی

در این روش ضرایب معادله را under relax می‌کنیم.

$$\frac{a_p}{\alpha}\varphi_p = \sum a_{nb}\varphi_{nb} + b + (1-\alpha)\frac{a_p}{\alpha}\varphi_p^*$$

φ تکرار قبلی

در معادله‌ی فوق ضرایب اصلاح شده است.

ما معمولاً از روش ضمنی استفاده می‌کنیم چون در روند برنامه‌نویسی کار ما راحت‌تر خواهد بود.

وقتی مسئله در هر تکراری همگرا شود مقدار φ_p^* همان φ_p خواهد شد.

اگر $1>\alpha>0$ باشد ما در حال کند کردن محاسبات هستیم

اگر روند محاسبات خیلی کند باشد از over-relaxatio استفاده می‌کنیم که $\alpha>1$ خواهیم داشت.

توضیح: یک مسأله‌ی دو بعدی مکانیک سیالات همراه با انتقال حرارت در نظر بگیرید باید معادلات پیوستگی و مومنتوم و انتقال حرارت را در نظر بگیریم (۴ مجهول داریم)
به عبارتی درجه آزادی ما در هر نقطه از شبکه ۴ است. (۴ مجهول در هر نقطه) و به ازای n نقطه باید $4\times n$ معادله را حل کنیم.
برای چنین مسأله‌ای طبیعت تغییرات ما برای هر نقطه از تکراری به تکرار دیگر لزوماً همان طبیعت مومنتومی u و v و P نیست!
یعنی ممکن است در یک نقطه و از یک تکرار به تکرار دیگر یک مقدار (مجهول) تغییر چندانی نکند و مجهول دیگر تغییر زیادی کند.
← پس ما نمی‌توانیم از یک مقدار α ثابت برای مومنتوم در جهت x، مومنتوم در جهت y، پیوستگی و معادله‌ی انرژی استفاده کنیم. ما مجبوریم αهای مختلف داشته باشیم ($\alpha_T, \alpha_v, \alpha_p, \alpha_u$)

پیشنهاد: برای مکانیک سیالات $\alpha_u \cong 0.7$ و برای فشار در معادله‌ی پیوستگی $\alpha_p = 0.5$

Convertion - Diffusion Problem
مسائل جابجایی و پخش

در این بخش هدف حل مسائلی از نوع توزیع یک کمیت در حضور یک میدان جریان معلوم است.

که یعنی $\vec{U}, \rho$ ، ρ, T معلوم باشند
برای جریان غ ق تراکم کافیست $\vec{U}$ و ρ معلوم باشند؛

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i\varphi)}_{\text{پیش از این با این ترم کاری نداشتیم.}}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+S_\varphi$$

✓ فرض ما این است که مؤلفه‌های U و ρ و Γ معلوم است.

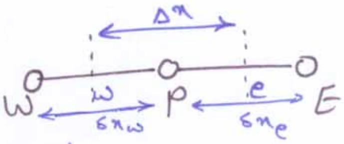
✓ هدف ما بدست آوردن توزیع φ در حضور میدان جریان معلوم است.

حالت یک بعدی و پایا (Steady 1-D Situation)

$$\frac{d}{dx}(\rho U\varphi)=\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\varphi}{dx}\right)\qquad (I)$$

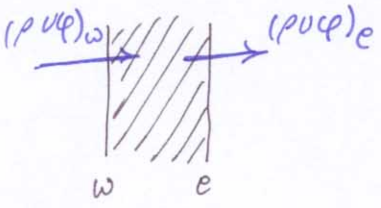
باید از معادله پیوستگی استفاده کنیم.

$$\rho U=\text{Constant}\Longleftarrow\frac{d(\rho U)}{dx}=0$$



✓ ρU دبی جرمی در واحد زمان و در واحد سطح را نشان می‌دهد.

$$\text{با انتگرال‌گیری از (I)}\Longrightarrow(\rho U\varphi)_e-(\rho U\varphi)_w=\left(\Gamma\frac{d\varphi}{dx}\right)_e-\left(\Gamma\frac{d\varphi}{dx}\right)_w$$



فلاکس جرمی چیست؟ همان ρU است یعنی دبی جرمی در واحد زمان و در واحد سطح

$$\left(\Gamma\frac{d\varphi}{dx}\right)_e\cong\Gamma_e\frac{(\varphi_E-\varphi_P)}{\delta x_e}\Longleftarrow\text{تقریب‌های ما}$$

$$(\rho U\varphi)_e\cong(\rho U)_e\underbrace{\frac{(\varphi_E+\varphi_P)}{2}}_{\text{تقریب برای }\varphi_e}$$

برای w هم به همین شکل تقریب می‌زنیم و براساس معادله جریان استاندارد می‌نویسیم.

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W$$

$$a_E = D_E - \frac{F_e}{2}$$

$$a_W = D_W + \frac{F_w}{2}$$

$$a_P = a_E + a_W$$

$$\varphi_e = \frac{\varphi_E + \varphi_P}{2}$$

$$\varphi_w = \frac{\varphi_W + \varphi_P}{2}$$

فرض کنیم F معرف flow باشد و D معرف diffusion

$$F \equiv \rho U$$

تأثیر قدرت جریان را نشان می‌دهد

mass flow rate

$$D \equiv \frac{\Gamma}{(\delta x)}$$

قدرت نفوذ را نشان می‌دهد

Diffusion Conductance

یک اشکال اساسی در معادله‌ی جبر شده‌ی بالا وجود دارد و آن این است که a_E می‌تواند منفی شود ($\frac{F_e}{2}$ اگر از D_E بزرگ‌تر باشد این اتفاق می‌افتد)

می‌دانیم $\frac{F_e}{2}$ و D_E هر دو همواره مثبت هستند. پس اگر $\frac{F_e}{2} \geq D_E$ باشد a_E منفی می‌شود و یکی از قوانین نقض می‌شود.

ما باید بررسی کنیم که $\frac{F_e}{2D_E} \geq 1$ اتفاق نیفتد. (یا $\frac{F_e}{D_e} \geq 2$ نباشد)

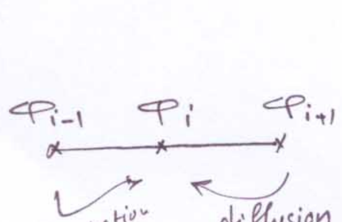
$\frac{F_e}{D_E}$ را اگر از فرم بُعدی خارج کنیم برابر خواهد بود با:

$$\frac{F_e}{D_E} = \frac{\rho U_E}{\frac{\Gamma}{(\delta x)_e}} \Rightarrow \frac{\rho U \delta x}{\Gamma}$$

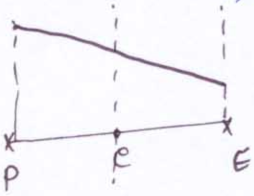
فرم استخراج شده همان عدد پکلت است.

$$P_e = \frac{\rho U \delta x}{\Gamma}$$

در حقیقت مشکل ما وقتی بروز پیدا می‌کند که $P_e \geq 2$ شود. یعنی اگر قدرت کانوکشن بیش از دو برابر قدرت دیفیوژن باشد. از لحاظ فیزیکی، چون از پایین دست تنها مکانیزم موثر دیفیوژن است که به بالا دست منتقل می‌شود و همچنین کانوکشن از بالا دست به پایین دست منتقل می‌شود. اگر کانوکشن نسبت به دیفیوژن دو برابر باشد نتایج برای φ دقیق نخواهد بود.



✓ برای تقریب مقادیر φ_e و φ_w از یک فرض توزیع خطی برای φ نسبت به x استفاده کردیم، دیده می‌شود که این فرض منجر به معادلاتی گسسته‌ای می‌شود که احتمال منفی شدن ضرایب معادله وجود دارد.



فرض کنید $D_E = D_W = 1$ و $F_e = F_w = 4$ باشد.

اگر $\varphi_E = 200$ و $\varphi_W = 100$ در نتیجه $\varphi_P = 50$ خواهد بود. (جایگذاری در معادله)

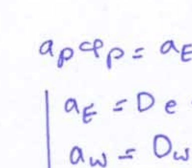
اگر $\varphi_E = 100$ و $\varphi_W = 200$ در نتیجه $\varphi_P = 250$ خواهد بود. (جایگذاری در معادله)

این جواب‌ها کمی عجیب هستند. دیده می‌شود $\frac{F_e}{D_E} = 4$ و چون بزرگتر از ۲ است a_E که بدست می‌آید منفی است. پس نتیجه‌ی مناسب نتیجه‌ای درست فیزیکی نیست.

باید راه حلی برای این مشکل یافت چون عملاً جواب در رینولدزهای بزرگ (پکلت بزرگ) اشتباه خواهد شد.

برای حل این مشکل چاره باید کرد چون فرض توزیع خطی ممکن است خطرناک باشد. از یک تقریب به نام upwind می‌توان استفاده کرد.

تقریب بالادستی (upwind scheme)



برای مقادیر φ در هر حجم کنترل، مقدارش را با مقدار بالادستی مساوی می‌گیریم.

$\varphi_e = \varphi_P$ if $F_e > 0$ (یعنی زمانی که جریان از چپ به راست است)

$\varphi_e = \varphi_E$ if $F_e < 0$ (زمانی که جریان از راست به چپ است)

یادآوری: F بیانگر فلاکس جرمی است و مثبت و منفی شدنش در جهت آن موثر است.

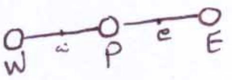
$$a_P\varphi_P = a_E\varphi_E + a_W\varphi_W$$

$$a_E = D_e + \max(-F_e, 0)$$

$$a_W = D_w + \max(F_w, 0)$$

$$a_P = a_E + a_W$$

$$F \equiv \rho u \qquad D \equiv \frac{\Gamma}{(\delta x)}$$



در شبکه‌بندی در وضعیتی که جریان از چپ به راست باشد:

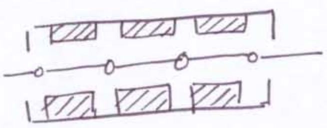
$\varphi_w = \varphi_W$

$\varphi_e = \varphi_P$

و اگر جریان از راست به چپ باشد

$\varphi_e = \varphi_E$

$\varphi_w = \varphi_P$



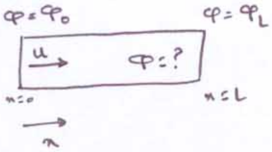
حال اگر مسئله جریان را بصورت Tank & Tube در نظر بگیریم، کانوکشن از طریق لوله‌ها انجام می‌شود و کانداکشن از طریق دیواره انجام می‌شود.

سیال در لوله هیچ اطلاعی در مورد دما در قسمت جلوئی ندارد و همه‌ی اطلاعات از بالادست به پایین دست توسط ρu منتقل می‌شود. در اینجا پکلت کوچک است (سیال بالادست در مورد پایین دست هیچ اطلاعی ندارد!؟) در اینجا نقش دیفیوژن قوی است (پکلت کوچک است) مقادیر مجهول در نقاط پایین دست از طریق دیفیوژن قوی خود اطلاعات را به بالادست منتقل می‌کنند.

پس در پکلت‌های کوچک تقریب upwind به ما جواب دقیق نمی‌دهد. (به خاطر نقش دیفیوژن)

بهتر است حل تحلیلی را بررسی کنیم و وجه تمایزش با تقریب upwind را بیابیم.

حل دقیق (exact Solution)



فرض لوله‌ای داریم که در ابتدا و انتهای مشخصی از آن اطلاعات زیر موجود باشد.

جریان یک بعدی با u معلوم جریان دارد و φ مجهول است. و شرایط مرزی روبرو را داریم.

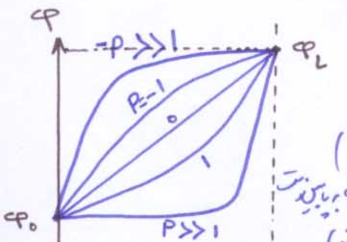
معادله : $\dfrac{d(\rho u\varphi)}{dx} = \dfrac{d\left(\Gamma \frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx}$ B.C (شرایط مرزی) : $x=0,\ \varphi=\varphi_0$; $x=L,\ \varphi=\varphi_L$

حل معادله توسط انتگرال‌گیری و شرایط مرزی

$$\frac{\varphi-\varphi_0}{\varphi_L-\varphi_0} = \frac{\exp\left(\frac{Px}{L}\right)-1}{\exp(P)} \quad , \quad \underset{\text{پکلت}}{P} = \frac{\rho u L}{\Gamma}$$

همانطور که دیده می‌شود تغییرات φ نسبت به x بصورت نمائی است (نه خطی است و نه تقریب upwind) آن در پاسخ ما پارامتری به نام پکلت داریم که می‌تواند شیب این تابع نمائی را تغییر دهد.

حال برای پکلت‌های متفاوت نمودار φ - x را رسم می‌کنیم.



توضیح نمودار: برای P<<-1 یعنی u منفی ← ρuL ترم قوی‌تری است، یعنی نقش دیفیوژن زیاد است (یعنی اطلاعات از پایین دست به بالادست منتقل می‌گردند)

برای P>>1 یعنی کانوکشن خیلی قوی است (سرعت بزرگ) و دیفیوژن در مقابل کانوکشن حرفی ندارد (یعنی اطلاعات از بالادست به پایین دست منتقل می‌شوند)

در پکلت‌های بزرگ مشاهده می‌شود که در بخش عمده‌ای از میدان حل φ برابر با مقدار بالادست است (یعنی وضعیت upwind)

آن در پکلت‌های کوچک عکس موضوع برقرار می‌شود که بیشتر φ پایین دست روی میدان حل حکمفرماست.

در پکلت‌های معمولی: ρuL≈0 یعنی فقط دیفیوژن داریم پس φ بصورت خطی تغییر می‌کند.

برای P معمولی طبیعت تغییرات φ شبیه به حالت ρuL≈0 (یا P≈0) است.

نکته: پس عدد پکلت پارامتری تعیین کننده در تعیین صحیح مقدار φ در یک مسئله کانوکشن - دیفیوژن است که به ما می‌گوید از چه Scheme استفاده کنیم.

$P \geq 2$ یا $P >> 1$ از upwind می‌توان استفاده کرد

$P < 2$ از روش میانی استفاده می‌کنیم.

نتایج:

۱- فرض تغییرات خطی فقط برای مقادیر $|P|$ کوچک فرض خوبی است.

۲- اگر قدر مطلق P بزرگ شود مقدار φ در وجه تقریباً برابر با مقدار φ در نقطه‌ی بالادست است.

۳- وقتی P بزرگ است $\frac{d\varphi}{dx}$ در وجه تقریباً صفر است.

سؤال: در پکلت‌های متوسط (مثلاً ۲۰ یا ۴۰) از چه روشی باید استفاده کرد؟

نه می‌توان دیفیوژن را نادیده گرفت و نه کانوکشن رو. (تقریب‌های گفته شده جواب درست نمی‌دهند)

می‌توان خود جواب تحلیلی را جواب مورد نظر در نظر گرفت (بهترین تقریب خود جواب است) (یعنی از تقریب exponential استفاده کرد)

exponentional scheme ← این تقریب دقیق‌ترین تقریب برای حالت یک بعدی است.

تقریب نمایی (exponential scheme)

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W$$

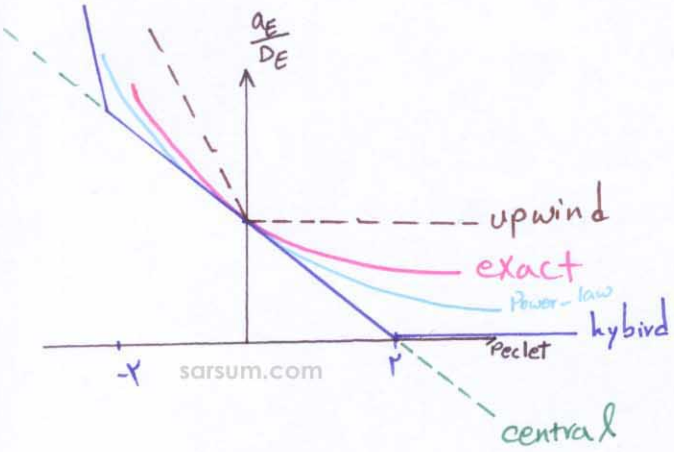
$$a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} \qquad a_W = F_w \frac{\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right)}{\left(\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right) - 1\right)}$$

$$a_P = a_E + a_W$$

معایب: این روش توسط کامپیوتر پرهزینه است چون یک تابع نمایی دارد.

بهتر است از تقریب‌های ترکیبی برای تقریب استفاده کرد

رسم تغییرات $\frac{a_E}{D_E}$ بر اساس عدد پکلت



← دیده می‌شود که در upwind برای $P \geq ۲$ به مرور فاصله‌ی حل upwind و حل دقیق بیشتر و بیشتر می‌شود

← در پکلت های منفی نیز حل دقیق و حل upwind از هم فاصله می‌گیرند.

← در محدوده‌ی کوچکی (اطراف $P=0$) از حل upwind می‌توان استفاده کرد.

← در توزیع central دیده می‌شود که در فاصله‌ی $-۲ \leq P \leq ۲$ به حل دقیق خیلی نزدیک است. اگر $Pe \geq ۲$ باشد مقدار a_E منفی می‌شود. و اگر $P \leq -۲$ باشد، توزیع central از حل دقیق دور می‌شود. پس در فاصله‌ی ۲ و ۲- این توزیع قابل استفاده است.

روش توزیع hybrid

توزیع hybrid به این دلیل به وجود آمد که در پکلت های بزرگ مشکلی نداشته باشیم. در حقیقت ما دو معادله داریم. یک معادله در $-۲ < P < ۲$ و یک معادله‌ی دیگر در $P > ۲$ و $P < -۲$.

hybrid یک توزیع مناسب و ساده است که به حالت دقیق نزدیک است و تنها از سه پاره خط تشکیل شده.

روش توزیع Power-law

این توزیع به حالت exact (حل دقیق) خیلی نزدیک است ولی هزینه‌ی حل exact را ندارد.

hybrid بصورت خطی بود ولی Powerlaw یک توزیع توانی است که به exact نزدیک است و نسبت به بقیه روش ها بهترین پاسخ را می‌دهد.

$$a_E = D_E \max\left(0, \left(1 - 0.1\frac{|F_e|}{D_e}\right)^5\right) + \max(0, -F_e)$$

$$a_W = D_W \max\left(0, \left(1 - 0.1\frac{|F_w|}{D_w}\right)^5\right) + \max(0, F_w)$$

$$a_P = a_E + a_W$$

✓ در واقعیت بنا به شرایط مسئله هر کدام از توزیع ها ممکن است مناسب و بقیه نامناسب باشند.

✓ این توزیع هم دقیق است و هم اقتصادی.

در بعضی از جریان‌های توربولان تقریب upwind جواب‌های بهتری را نتیجه می‌دهد.

نکته مهم: تمام نکات گفته شده در چند صفحه اخیر (تقریبات) مربوط به حل یک بعدی جریان است. (کانوکشن موجود، دیفیوژن موجود)

تعمیم مسأله به حالت دو بعدی در حالت دیفیوژن و کانوکشن

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + a_P^0 + \varphi_P^0 + b$$

دقت شود و این معادله همراه معادله‌ی پیوستگی باید حل شود.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \operatorname{div}(\rho \vec{V} \varphi) = \operatorname{div}(\Gamma \nabla \varphi) + S$$

$$a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} \qquad a_W = \cdots, \; a_N = \cdots$$

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y, \quad D_e = \Gamma_e \frac{\Delta y}{(\delta x)_e}$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y$$

$$a_P^0 = \rho_P^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y$$

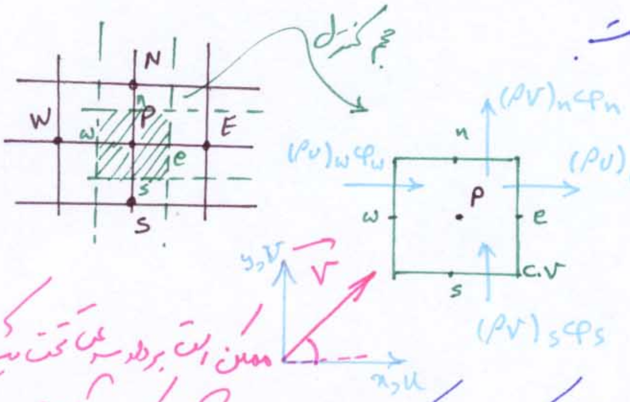
برای سه بعدی هم به همین شکل عمل می‌کنیم

عبارت فوق از معادله‌ی مومنتوم (به‌علاوه‌ی پیوستگی) حاصل شده است

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \varphi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + S$$

معادله مومنتوم

در اینجا روش دیفرانسیل ما محدود به fully implicit است.



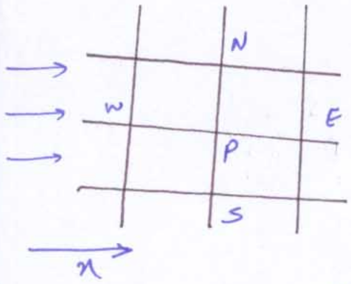
ممکن است بردار سرعت تحت یک زاویه باشد، که باید آن را به دو مولفه‌ی u و v تبدیل کنیم.

در حقیقت این است که بردار سرعت تحت زاویه است و باید به مولفه‌های u و v تفکیک شود.
در حقیقت ما دو مسأله‌ی یک بعدی خواهیم داشت یکی در جهت x با سرعت u و دیگری در جهت y با سرعت v.
حال به سادگی می‌توانیم در هر جهت از تقریبات گفته شده استفاده کنیم.
(تقریبات در یک بعد قابل استفاده هستند)
در حقیقت ما دو مسأله‌ی یک بعدی داریم. در مسائل سه بعدی هم می‌توان حل را به سه مسأله یک بعدی تبدیل کرد.

مختصات یک راهه

پیش از این بحثی را در مورد مختصات یک راهه و دو راهه مطرح کردیم. دیدیم که در مختصات یک راهه اطلاعات در یک جهت منتقل می‌شود.

یک کانال دو بعدی را که جریان از سمت چپ به راست حرکت می‌کند را در نظر بگیریم:



اگر در دو نقطه از جریان عدد پکلت بزرگ باشد (یعنی کانوکشن خیلی قوی باشد) معنای این حرف این است که دیفیوژن به سمت صفر می‌رود (دیفیوژن پایین دست به سمت بالادست).

$P \to \infty$

$a_e \to 0$

$F_e = (\rho U)_e \Delta y$

$D_e = \Gamma_e \Delta y/(\delta x)_e$

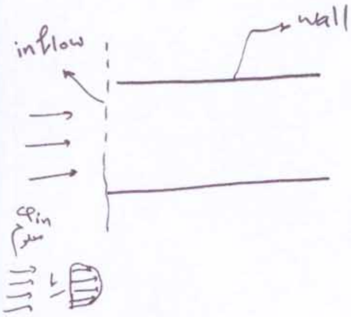
$P = \dfrac{F_e}{D_e}$

if $P=0$ → Two way Problem → حل همه‌ی نقاط با هم

if $P \to \infty$ → one way Problem → (روش حل مارچینگ)

شرایط مرزی

در بخش‌هایی که با میدان جریان سر و کار داریم شرایط مرزی خیلی مهم است.

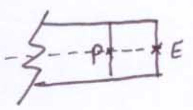


اولاً باید یک مرز غیر قابل نفوذ داشته باشیم که کانوکشن در آنجا صفر باشد. و مقدار φ تنها از طریق دیفیوژن باشد

ثانیاً مرز inflow داریم و معمولاً مقدار φ مشخص داریم و در جایی است که جریان داریم.

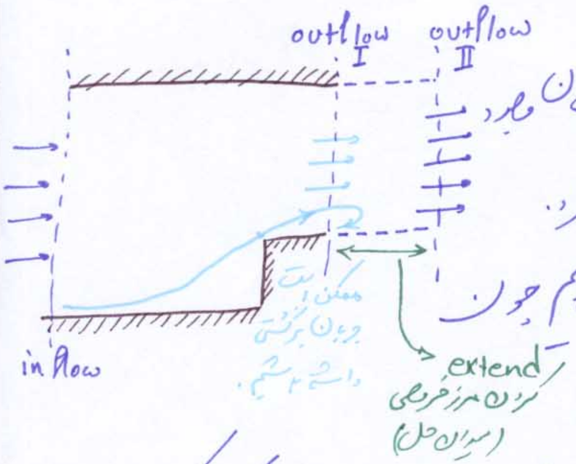
ثالثاً مرز outflow باشد و هیچ اطلاعاتی راجع به φ نداریم

در حالت one way با همین اطلاعات می‌توان به جواب رسید اما در حالت Two way باید فکری به حال outflow بکنیم چون اطلاعاتی در آن بخش نداریم.



فرض کنیم دیفیوژن در مرز خروجی کوچک باشد یعنی در نقطه‌ی قبل آخر (P در شکل) مقدار a_E صفر باشد جریان در این حالت تقریباً در آنجا one way است. در حقیقت مقدار $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ روی مرز صفر است و این یعنی مقدار مجهول روی مرز خروجی برابر است با مقدار مجهول روی نقطه‌ی قبل. $\varphi_E = \varphi_P$

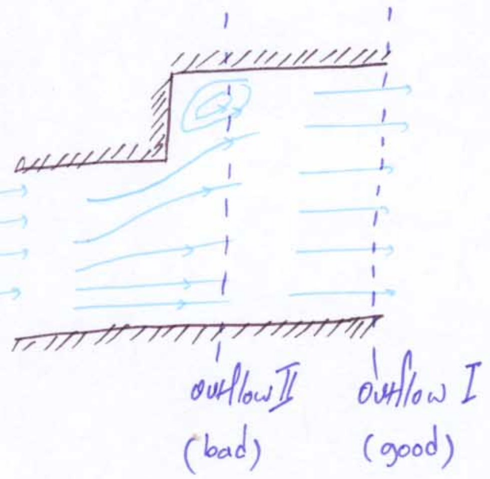
اگر به این راه دقت نشود ممکن است به اطلاعات غلط برسیم. معمولاً راه خوبی برای رسیدن به جواب است، خیلی کمک می‌کند.



فرض کنید مسأله‌ای را به صورت روبرو داشته باشیم، در محل خروجی به علت پله تیز امکان وجود جریان برگشتی وجود دارد و جریان در outflow I بصورت inflow در می‌شود.

اگر $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ را در این مرز نهایی صفر قرار دهیم، اشتباه بزرگی را انجام داده‌ایم چون جریان در بخشی از آن از بیرون به داخل می‌آید.

می‌توانیم برای رفع این اشکال مرز را به صورت مصنوعی ادامه دهیم و outflow I را به جایی منتقل کنیم که در این حالت ناخوشایند دیگر موجود نباشد. ما با این کار در تمام قسمت خروجی را شامل outflow II کرده‌ایم و دیگر جریان برگشتی روی مرز خروجی موجود نیست.



اگر در شکل روبرو را مدنظر قرار دهیم محل outflow I مناسب است چون جریان برگشتی نداریم. در آن اگر outflow در محل II بود یک وقتی بد بود و مجبور بودیم که میدان حل را گسترش دهیم تا به outflow I برسیم.

نیاز به extend ندارد.

دیفیوژن‌های غیرواقعی (False diffusion)

- upwind-scheme سبب false diffusion می‌شود و منجر به جواب خطایی شود. و از این نظر central scheme مناسب است.
- اگر Γ موجود در central scheme را با $\Gamma + \frac{\rho u \delta n}{2}$ جایگزین کنیم، به جواب upwind scheme می‌رسیم.

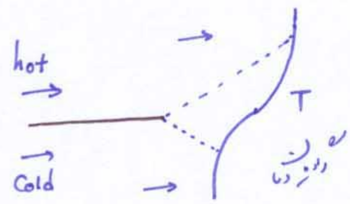
مشکل این است که upwind به Γ مقداری به مقدار $\frac{\rho u \delta n}{2}$ اضافه می‌کند در حقیقت $\frac{\rho u \delta n}{2}$ باعث False diffusion می‌شود.

- اینکه فرض central برای پکلت‌های بزرگ نادرست است. پس central تقریب خوبی نیست.
- در hybrid هم مشکل upwind وجود دارد (همچنین در Power-law)

ریشه‌ی مشکلات در تقریب‌ها مختلف نیست بلکه در سایز شبکه است و نوع روش حل.

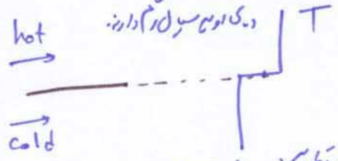
✓ جریانی را در نظر بگیرید که در دو طرف صفحه‌ای وجود دارد. یک طرف سیال سرد باشد و یک طرف سیال گرم، انتظار داریم در انتهای صفحه دو سیال با هم مخلوط شوند. و یک shear layer تشکیل می‌شود (از لحاظ مکانیکی و دمایی)

محلی که گرادیان داریم

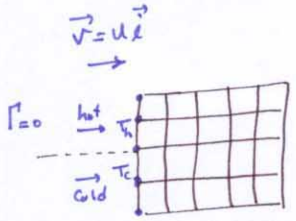


وجود مقدار مشخص برای Γ باعث این اتفاق شده است

اگر Γ را حذف کنیم (Γ=0) انتظار یک پروفیل دمای ثابت در درون میدان جریان را خواهیم داشت

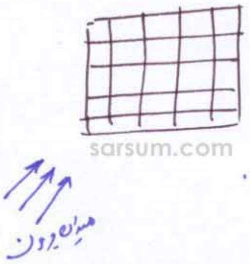


✓ برای Γ=0 حل عددی را بررسی می‌کنیم (معادله Convection-diffusion و یک بعدی)



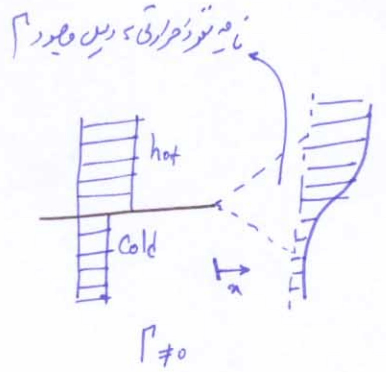
✓ اگر به صورت تیز پروفیل ثابت در داخل میدان جریان باقی بماند، یعنی هیچ دیفیوژن غیرواقعی اضافه نشده است.

← هدف بررسی دو حالت شبکه‌ای روبروست



اگر شبکه بندی ما تحت زاویه در میدان جریان باشد هم می‌توان نتایج را بررسی کرد.

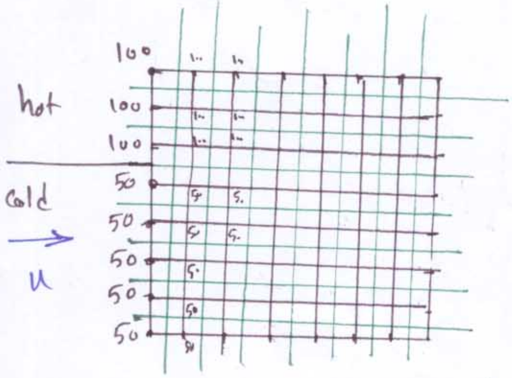
مسأله‌ی اضافه شدن یک ترم به عنوان ضریب نفوذ غیرواقعی در اثر استفاده از اسکیم‌هایی مانند اسکیم بالادستی تا مدت‌ها به عنوان یک ابهام اصلی برای قضاوت در مورد دقت این ترتیب‌ها مطرح بود. بر اساس بررسی‌های به عمل آمده، مشخص شده است که False diffusion مسأله‌ی مرتبط با نوع اسکیم مورد استفاده نبوده، بلکه اصولاً به بعد مسأله مورد نظر و زاویه‌ی بردار سرعت با امتداد شبکه (به صورت محلی) و اندازه‌ی شبکه بستگی دارد. در این رابطه یک مسأله‌ی ساده‌ای که در ادامه می‌آید به عنوان روشی برای بررسی این ادعا مطرح است.



پیش از مخلوط شدن سیال پروفیل دمای به صورت Sharp است، با پیشروی در جهت x پروفیل دمای مخلوط دو سیال به هم روبرو خواهد شد که ناحیه‌ای به دلیل وجود Γ نیز ایجاد خواهد شد.

گاهی با نگارش این مسئله را در دو حالت حل می‌کنیم

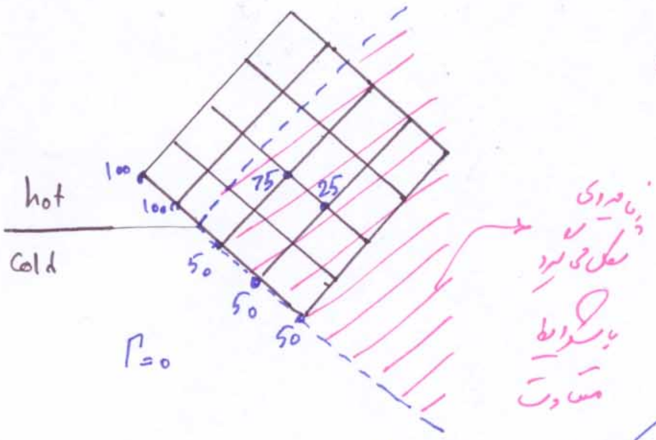
به کارگیری upwind scheme برای جریان یکنواخت در جهت x



$$\left.\begin{array}{l}\Gamma=0\\ \text{flow } y=0\\ V=0\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{scheme}]{\text{upwind}}\begin{array}{l}a_N=a_S=0\\ a_E\ (\text{استفاده از upwind})=0\end{array}\overset{\text{upwind}}{\Longrightarrow}\begin{array}{l}a_P=a_W\\ \varphi_P=\varphi_W\end{array}$$

(به دماهای درون شبکه بر از نقاط مرز می‌رسیم. مقدار φهای ما با φهای سمت چپ برابر است $\varphi_P=\varphi_W$ و هیچ برشی از لحاظ دمایی نخواهیم داشت)

به کارگیری upwind Scheme برای جریان یکنواخت تحت زاویه



دما در داخل ناحیه‌ای که شکل گرفته متفاوت است.

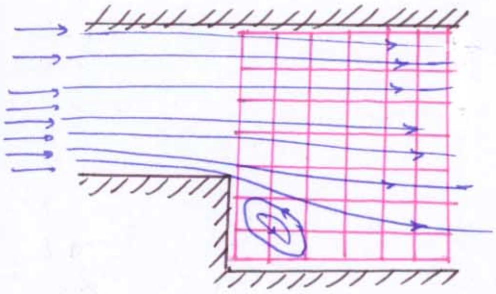
در حقیقت دمای ناحیه نه دمای 100 درجه می‌شود و نه 50.

و دمای ناحیه به مرور گسترده‌تر می‌شود.

در اینجا اتفاقی که افتاده به خاطر به کارگیری upwind scheme نیست بلکه به علت وجود زاویه است

✓ False diffusion در مسائل یک بعدی اتفاق نمی‌افتد (در دو بعدی و سه بعدی اتفاق می‌افتد) و دلیل و مهم‌ترین دلیل آن زاویه بین جریان و شبکه است. همچنین F.D، به سایز شبکه هم بستگی دارد. (هر چه ریزتر شود F.D کمتر می‌شود) (هر چه زاویه به سمت 45° برود F.D بیشتر می‌شود)

با توجه به علت وقوع False diffusion چه کار کنیم که این اتفاق نیفتد؟



کانال روبرو را در نظر بگیرید. (شکلی که قبلاً هم ذکر شد)

در این کانال در محلی به طور ناگهانی تغییر عرض می دهد.

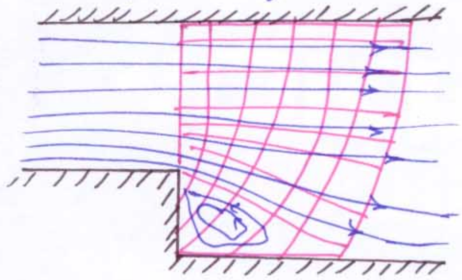
وقتی می خواهیم مسأله ی روبرو را حل کنیم و در مش محاسبات و

پخش انتهایی را در نظر بگیریم.

درست در محلی که ما حساس هستیم (محل برگشت) False diffusion اتفاق می افتد و توزیع سرعت را به هم می ریزد، برای حل

این مشکل باید به نحوی این زاویه را از بین ببریم. پس بهتر است شبکه را طوری طراحی کنیم که منطبق بر مرزهای

حل باشد. مش شبکه ی زیر که اصلاح شده درست است.



ما با این کار زاویه ی جریان با شبکه را به سمت صفر میل داده ایم و

False diffusion را به حداقل رسانده ایم. (تولید این شبکه در CFD2

بررسی خواهد شد)

راه دوم برای رفع این مشکل ریز کردن شبکه است.

جمع بندی False diffusion

- وقتی جریان زاویه دار وارد شود و در راستای عمود بر خط جریان گرادیان موجود باشد. False diffusion اتفاق می افتد.

- مهمترین عامل بروز F.D. رفتار یک سویه ی ما به صورت محلی است (چون در واقع ما یک مسأله دو سویه را به صورت یک سویه حل می کنیم)

- و متاسفانه central scheme به عنوان یک راه حل برای F.D غلط است و این ترتیب می تواند در Pe (پکلت) های بالا

ما را به جواب غلط برساند.

- اسکیم های پیچیده تری برای حل مسائل F.D. مورد نیاز است. (مثل Skew upwind different sheme)

- کاهش سایز شبکه در رفع مشکل F.D. مؤثر است.

معادلات مومنتوم

شکل کلی می‌دانیم شکل رو به رو هست:

ترم جابجایی — ترم دیفیوژن — ترم چشمه

$$\frac{\partial \rho\varphi}{\partial t} + div(\rho \vec{u}\varphi) = div(\mu \nabla\varphi) + S$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{m}, \quad \Phi = m\vec{v} \qquad \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + div(\rho \vec{v}\vec{v}) = div(\mu \nabla \vec{v}) + S$$

← کوپلینگ بین ترم فشار و ترم سرعت را در قالب معادله‌ی مومنتوم خودش را نشان می‌دهد.

← معادله‌ی مومنتوم باید همراه با پیوستگی حل شود تا درگیر شدن دانسیته حل شود.

✓ برای یک مسأله‌ی سه بعدی، سه معادله‌ی مومنتوم داریم یک معادله‌ی پیوستگی داریم و یک معادله‌ی انرژی؛ پنج معادله در دست داریم که شامل سه مولفه‌ی سرعت مجهول، میدان فشار مجهول و ρ و انرژی هستند.

✓ مشاهده می‌شود که با ورود دانسیته به معادلات ترمودینامیک کوپل می‌شود با معادله‌های دینامیکی (مومنتوم).

ما باید ارتباط بین P، ρ و T را به صورت یک معادله نشان دهیم. (بوسیله‌ی state equ.)

مشکلات:

① کوپل بودن معادلات (میدان فشار با میدان سرعت)

② درگیر شدن معادلات ترمودینامیک با معادلات دینامیکی در مواقعی که تراکم‌پذیری هم هست.

③ عدم برخورداری از یک معادله‌ی مستقل برای میدان فشار

④ برای جریان‌های توربولانس حل مستقیم معادلات ناویر استوکس (NS) بسیار پیچیده و در اکثر مواقع ناممکن است. (مدل‌سازی توربولانس لازم است)

← به جای حل خود معادلات، از یک مدل‌سازی استفاده می‌کنیم.

← مجهولات اصلی: u و v و w و P و ρ و T (Primitive variables) ⟸ به جای حل مستقیم از مدل‌سازی استفاده می‌کنیم.

← چون این‌ها چیزهای فیزیکی است نسبت به آن‌هاست. حل مستقیم ما را به اینها می‌رساند.

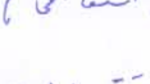
⑤ غیرخطی بودن معادلات.

اطلاعات مورد نیاز ما معمولاً افت فشار و انتقال حرارت است که می‌خواهیم به اینها دست یابیم (هدف اصلی)

مولفه‌های مهم سینماتیکی جریان:

① خطوط موجود در یک جریان سیال (خط جریان، خط رگه، خط مسیر)
(به ما کمک می‌کنند تصویرسازی جریان شکل می‌گیرد)

② سیرکولاسیون در یک جریان $\oint v\,dl = \Gamma$



③ ورتیسیتی (چرخش): حرکت نسبی یک نقطه نسبت به یک نقطه ترکیب آن.

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$$

✓ می‌دانیم در یک جریان به طور کلی سه نوع حرکت داریم که ۱- انتقالی ۲- دورانی ۳- تغییر شکل
دورانی ← ورتیسیتی

برای حل کردن معادلات میدان جریان:
- از روی میدان سرعت دما را و بدون تشکیل نتایج
- از روی میدان ورتیسیتی و بدون تشکیل نتایج

که با این کار توجیه و ساده شدن معادلات می‌شود.

حل جریان سیال:
- استفاده از متغیرهای اصلی (متغیرهای فیزیکی جریان) (Primitive variables)
- استفاده از متغیرهای نوع ۲ (Secondary variables)

روش کار در Secondary variables ← یعنی میدان فشار را از معادلات مومنتوم بیرون بکشیم و در نهایت به جای معادلات مومنتوم معادله‌ای را برای دیفرانسیل ورتیسیتی بوجود آوریم.

مثلاً در یک جریان دو بعدی، در جهت x و y مومنتوم را داریم. اگر از دو معادله مشتق بگیریم و آنها را با هم جمع کنیم معادله‌ای برای ورتیسیتی بدست می‌آید. و تعداد معادلات کم می‌شود.

تابع جریان را تعریف می‌کنیم: تابع جریان ← تابع پتانسیل

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \longrightarrow \nabla^2 T = 0 \longrightarrow F(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

معادله لاپلاسین

که از این رابطه توزیع سرعت را می‌توان بدست آورد.

با استفاده از این نوع حل برای جریان‌های دوبعدی مانند چشمه و چاهک و دابلت بدون نیاز به حل معادلات دیفرانسیل به طور مستقیم از طریق φ و ψ و ارتباط آنها بوسیله کوشی ریمان توزیع سرعت را بدست آوردیم. (با حل معادلات لاپلاس)

مشکلات این روش این است که آن برای حالت سه بعدی است (تابع جریان برای سه بعدی) که پیچیدگی زیاد است و تعداد معادلات زیاد می‌شود.

در حالت سه بعدی استفاده از تابع پتانسیل مرسوم است. (زیاد شدن تعداد معادلات)

گسسته سازی ترم $\frac{\partial P}{\partial x}$ در معادله مومنتوم و $\frac{\partial u}{\partial x}$ در معادله پیوستگی

برای گسسته سازی ترم‌ها معادله مومنتوم گسسته‌سازی را انجام دادیم. حالا می‌خواهیم گسسته سازی را برای $\frac{\partial P}{\partial x}$ انجام دهیم.

هدف ما تبدیل $\frac{\partial P}{\partial x}$ به یک معادله جبری است. (مثلا $P_w - P_e$)

W — w — P — e — E

$\frac{\partial P}{\partial x}$ در کجای معادله مومنتوم قرار دارد؟

مومنتوم در جهت x:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v u)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w u)}_{\text{کانوکشن}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{\text{دیفیوژن}} \underbrace{-\frac{\partial P}{\partial x}+V_x+B_x+f}_{\text{ترم چشمه } S}$$

$$\int_w^e -\frac{\partial P}{\partial x}dx = P_w - P_e = \frac{P_W+P_P}{2} - \frac{P_P+P_E}{2} = \frac{P_W-P_E}{2}$$

چون اطلاعات e و w را نداریم، به ناچار براساس P و W و E حل ایشان را انجام می‌دهیم.

در اینجا فرض شده تغییرات بین P و E ⟸ خطی است و شبکه یکنواخت است.

W — P — E (P_W, P_P, P_E)

حال این ترتیب چه اشکالی ایجاد می‌کند؟

در معادله مومنتوم در نقطه P، فشار خود نقطه P تأثیری در معادله گسسته سازی ندارد!!!

جلوگیری | x-momentum: $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + S$ فرض دائمی

در معادله داریم | Continuity: $\nabla\cdot u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\vec{u} = \text{Const.}$ و فرض غیرقابل تراکم

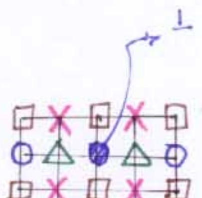
یعنی در نقطه P میدان سرعت و میدان فشار جدا شده‌اند ⟹ (دیگر کوپل نیستند)

یعنی این گسسته سازی می‌گوید عامل ایجاد جریان در نقطه P به فشار در نقطه P ربطی ندارد!!

(در جریان غیرقابل تراکم، گرادیان فشار عامل اصلی حرکت جریان است)

(دی کوپل شدن سرعت و فشار)

به نظر هر چیز طبیعی است می‌خواهیم ببینیم آیا مشکلی بوجود می‌آید؟



یک میدان فشار دو بعدی را در نظر بگیرید که اعداد هندسی یک میدان فشار را نشان دهند. مثلا نقطه 1 را در نظر بگیرید (الان فرض کنید) براساس معادله بدست آمده برای نقطه 1 دیفرانسیل فشار در اطراف آن صفر است. (از نظر معادله گسسته شده)

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_P = \frac{P-P}{2} = 0$$

سرعت حالات گسسته شده نسبت به مقدار فشار حساسیتی ندارند.

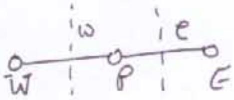
این اتفاق برای حالت دی‌کوپل شدن میدان سرعت و فشار اتفاق افتاده است.

اسم این میدان فشار خاص را "میدان فشار شطرنجی" می‌گذارند (A checker board Pressure field)

باید این مشکل جدی را حل کرد.

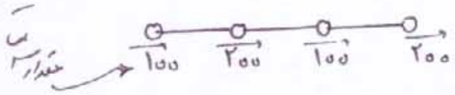
✓ این مشکل در گسسته سازی معادله پیوستگی هم بوجود می‌آید، چون استخراج آن مشابه شده است.

در معادله‌ی پیوستگی نیز همانطور که گفته شد مشکل داریم:



معادله‌ی پیوستگی / دیورژانس غیر قابل تراکم

$\frac{du}{dx}=0 \longrightarrow \quad u_e-u_w=\frac{u_E+u_P}{2}-\frac{u_W+u_P}{2}=0 \qquad u_E-u_W=0$



چند مورد ممکن است یک توزیع سرعت شطرنجی تصور کنیم (مثل شکل روبرو)

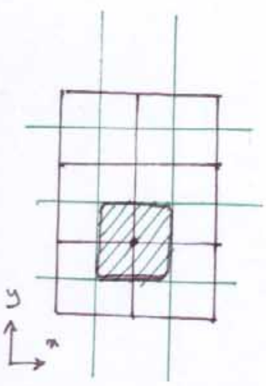
از نظر معادله‌ی فوق چنین میدان سرعتی هیچ مشکلی ندارد. (از نظر ریاضی)

ولی واضح است که در یک جریان سرعت این‌گونه نیست (با اینکه معادله‌ی گسسته شده را ارضا می‌کند) باید این اشکال را برطرف کرد.

یکی از راه حل‌های مطرح شده استفاده از شبکه‌ی شیفت داده شده است.

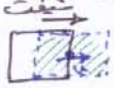
شبکه‌ی شیفت داده شده The staggered grid

کمیت‌ها دو بعدی، دو مؤلفه‌ی، تراکم‌ناپذیر (تراکم و ویسکوزیته ثابت) را در نظر بگیرید.

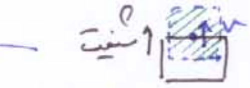


مجهولات ما P، u و v خواهد بود.

c.v ما که در نظر گرفتیم هم برای P و v و u است. یک راه حل برای رفع مشکل گفته شده در بخش قبل، جدا کردن c.v های معادلات مختلف است. مثلاً شبکه را به اندازه‌ی



نصف c.v به سمت راست شیفت دهیم. و محل محاسبه‌ی u را در محل جدید قرار دهیم.



به همین ترتیب در جهت v این کار را در راستای y انجام دهیم.

و بقیه مجهولات را (هر چه که هست) در c.v اصلی و انتگرال‌گیری کنیم.

در اینجا سه c.v به وجود آمده یکی برای $\vec{u}$، یکی برای $\vec{v}$ و دیگری برای ما بقی مجهولات.

در این حالت u مستقیماً به P در دو طرف خودش وابسته می‌شود. $\vec{u}$ در جایی بین دو طرف ظاهر شود (دی‌کوپلینگ از بین می‌رود) همچنین در جهت v این اتفاق می‌افتد.

یک راه حل برای مشکل دی‌کوپلینگ شدن میدان سرعت از میدان فشار، طریق استفاده از c.v های متفاوت نسبت به c.v های اصلی برای محاسبه‌ی مؤلفه‌های مومنتوم در صورتی که شبکه‌ی شیفت‌یافته باشد، بدین معنا که به جای استفاده از یک حجم کنترل برای انتگرال‌گیری معادلات همه‌ی مجهولات، از c.v های متفاوتی به ازاء هر یک از مؤلفه‌های مومنتوم استفاده کرده و برای بقیه‌ی مجهولات از همان c.v. اصلی استفاده می‌کنیم.

برخی از اثرات دیگر که به عنوان مشکل شبکه جابجا نشده مطرح می‌شود عبارتست از:

- دبی جرمی روی سطوح CV بدون میان‌یابی برای مولفه‌های سرعت قابل محاسبه می‌شوند.

- معادله پیوستگی گسسته شده شامل مولفه‌های سرعت در نقاط کناری هم خواهد بود و وقتی مانع از میدان سرعت شطرنجی (یکنواخت مساوی) که بتواند (علیرغم صحت) پیوستگی را ارضا نماید خواهد شد.

(بنابراین فقط میدان سرعت واقعی می‌تواند پیوستگی را ارضا کند) (در معادله گسسته‌ی پیوستگی خود سرعت‌ها اطراف یک نقطه ظاهر می‌شود و نه بین دو نقطه)

- اختلاف فشار بین نقاط کناری هم نیروی رانش طبیعی برای مولفه سرعت بین آنها می‌شود.

بنابراین میدان فشار شطرنجی دیگر به عنوان یک میدان فشار یکنواخت حس نشده و نمی‌تواند به عنوان یک حل قابل قبول در روند محاسبات تولید شود.

مشکل این روش ذخیره‌سازی، فضای کامپیوتری بیشتر است. چون سه CV داریم.

به جز روش شبکه جابجا شده، روش‌هایی به عنوان collocated method مطرح است.

پس بطور کلی دو نوع راه حل وجود دارد:
- استفاده از شبکه‌ی شبکه جابجا شده (staggered grid)
- استفاده از روش‌های (collocated method) (که از کنترل والیوم واحد استفاده می‌کند)

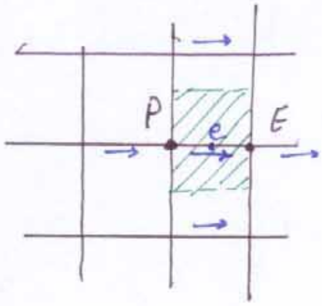
← فعلاً به روش شبکه جابجا شده می‌پردازیم (staggered grid).

✓ شرط حاکم کردن میدان سرعت، معادله پیوستگی است. باید معادله مومنتوم بتواند معادله پیوستگی را ارضا کند تا در حل واقعی قابل قبول باشد. یعنی این دو معادله با هم کوپل هستند و نباید بگذاریم تا ترتیبات عادی کوپلینگ از هم بیفتند.

معادلات برای جریان دو بعدی از لحاظ تراکم:
- غیر قابل تراکم (مجهولات u و v و P): ۲ معادله مومنتوم و یک پیوستگی نیاز است.
- قابل تراکم (مجهولات u و v، P، ρ و T): ۲ مومنتوم، ۱ پیوستگی و ۱ انرژی و ۱ معادله حالت نیاز است.

[illegible]

گسسته سازی معادله مومنتوم



$$a_E u_E = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P - P_E)$$

به حل حجم کنترل دقت شود که مربوط به سرعت است.

برای سرعت در یک نقطه می‌بینیم اختلاف فشار دو طرف آن ظاهر شده در صورتی که قبلاً دیده شده بود و اختلاف فشار یکی در میان ظاهر شده بود.

منطق حل: شروع کار با یک میدان فشار حدسی ← مؤلفه‌های معادله مومنتوم و سپس بدست آمدن میدان سرعت‌ها (که درست نیست) باید راهی پیدا کرد که میدان فشار را تصحیح کنیم که باعث تصحیح میدان سرعت شود (و با معادله پیوستگی چک کردن انجام شود.)

این منطق در الگوریتم‌های Simple base به کار می‌رود. یعنی با یک میدان فشار حدسی میدان سرعت بدست می‌آید.

منطق Simple Base method : ① حدس میدان فشار ② حل معادلات مومنتوم توسط میدان فشار ③ چک کردن معادله پیوستگی برای اینکه بفهمیم آیا میدان سرعت‌ها می‌توانند یک میدان واقعی باشند یا خیر ④ اصلاح میدان فشار ⑤ بازگشت به شماره‌ی ۲

علامت * روی P و u به معنی آن است که اینها فعلاً سرعت‌های واقعی نیستند.

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_e (P_P^* - P_E^*)$$

هر بار میدان فشار توسط مقدار P' تصحیح می‌شود و به معادله‌ی مومنتوم ارسال می‌گردد

$$P = P^* + P' \quad (I)$$

باید تأثیر این تصحیح روی میدان فشار را در میدان سرعت مشاهده کرد

$$u = u^* + u' \quad (II)$$

باید یک معادله برای تصحیح سرعت‌ها داشته باشیم.

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P - P_E)$$
$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_e (P_P^* - P_E^*)$$

از هم کم می‌کنیم تا رابطه‌ای پیدا شود که u' را به P' وصل کند.

$$a_e (u_e - u_e^*) = \sum a_{nb} u'_{nb} + A_e (P'_P - P'_E)$$

که اثر تصحیحات سرعت در نقاط همسایه

رابطه بین p' و u'

$$a_e(u_e-u_e^*)=\sum a_{nb}u'_{nb}+A_e(p'_P-p'_E)$$

از ترم $\sum a_{nb}u'_{nb}$ صرف‌نظر می‌کنیم چون معادله‌ی فوق یک معادله‌ی میانی است و در این معادله تصحیحات اعمال شده در نقاط همسایه P، بوده نبوده آن تأثیری ندارد چون در نهایت صفر هستند. (حذف نکردنش باعث ایجاد مقدار زیادی محاسبات می‌شود)

تقسیم معادله فوق بر a_e و ساده‌سازی

$$u_e=u_e^*+d_e(p'_P-p'_E) \quad (\text{III})$$

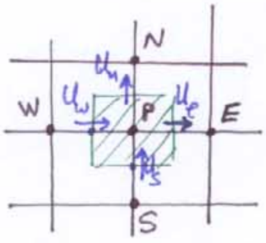
$$d_e\equiv\frac{A_e}{a_e}$$

به همین شکل در جهت v داریم

$$v_n=v_n^*+d_n(p'_P-p'_N) \quad (\text{III}')$$

یادآوری: این معادلات (III و III') اثر تصحیح فشار روی سرعت را نشان می‌دهد.
ما در ابتدا یک p' اعمال می‌کنیم و با آن میدان سرعت را تصحیح کرده و اثرات آن را روی میدان سرعت می‌بینیم.
سؤال این است این p' را از کجا بیاوریم؟

اگر از پیوستگی استفاده کنیم و رابطه‌ای برای p' بدست بیاوریم، به عبارتی داریم تصحیح فشار را در معادله‌ی پیوستگی تحمیل می‌کنیم.
پس بر اساس یک منطق تصحیح را انجام می‌دهیم



برای گسسته‌سازی معادله‌ی پیوستگی باید حول P یک انتگرال از معادله بگیریم.

$$(\rho uA)_w-(\rho uA)_e+(\rho vA)_s-(\rho vA)_n=0$$

(مقدار جرم‌های ورودی و خروجی از سطوح کنترل شرط پیوستگی را نشان می‌دهد)

پس از جاگذاری و ساده‌سازی:

$$a_P p'_P=a_E p'_E+a_W p'_W+a_N p'_N+a_S p'_S+b \quad (\text{IV})$$

$$a_E=(\rho A d)_e, \dots$$

$$a_P=a_E+a_W+a_N+a_S$$

$$b=(\rho u^* A)_w-(\rho u^* A)_e+(\rho v^* A)_s-(\rho v^* A)_n$$

اساس کار الگوریتم Simple همین است. $\Rightarrow$ یعنی اگر ما به میدان فشار تصحیح شده‌ای برسیم که میدان سرعتی بدهد که ترم b را صفر کند، الگوریتم ما به اتمام می‌رسد $\Rightarrow$ که ترم b ما بر اساس سرعت تکرار قبلی شکل گرفته است.

روش نیمه صریح برای معادلاتی که با میدان فشار لینک هستند. Semi Implicit method for pressure link equ.

قدم های الگوریتم:

۱- حدس یک میدان فشار (P^*) (مثلاً همه جا را $1\,atm$ در نظر می‌گیریم)

۲- حل معادله ی مومنتوم با این میدان فشار (سه معادله و سه مجهول) این معادله ی مومنتوم برای u و v و w حل می شود (که جواب واقعی نیست و باید تصحیح شود)

۳- معادله ی Pressure-Correction را اعمال می کنیم تا P' بدست آید. (معادله ی (III) صفحه قبل) (III)

۴- به کمک P' ها، میدان فشار و سرعت تصحیح می شود (معادله (IV))

۵- اگر متغیرهای دیگری داریم (مثلاً مسأله توربولانسی است و انرژی هم هست) معادلات مربوطه را حل می کنیم.

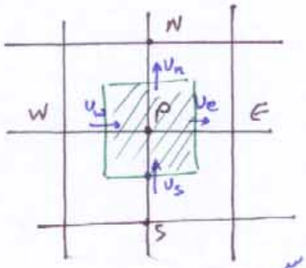
۶- ترم ها را چک می کنیم. اگر همگرا شده بود که الگوریتم به پایان رسیده و اگر همگرا نشد باید به مرحله ی ۲ بازگردیم.

✓ این الگوریتم کمی کند است و فشار حدسی با بالا می شود و جواب ها در مراحل اول از جواب دقیق دور می شود

بعدها سعی شد این الگوریتم تصحیح شود که الگوریتم Simple C (Simple Correction) بوجود آمد که نقش در وجود ترم $\sum a_{nb} V'_{nb}$ در معادلات تصحیح سرعت است. با این کار همگرایی سریع می شود (با اینکه هزینه ی محاسباتی هم زیاد می شود)

✓ مراحل انجام الگوریتم فوق در صفحه ی بعد توضیح داده شده است.

الگوریتم و جزئیات Simple :



همانطور که قبلاً توضیح دادیم حجم کنترل برای u و v باید شیفت داد (برای u به سمت راست و برای v به سمت بالا) و معادلات را به شکل زیر نوشت.

برای سه بعد

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{cases}
a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P - P_E) \\
a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + A_n (P_P - P_N) \\
a_t w_t = \sum a_{nb} w_{nb} + b + A_t (P_P - P_T)
\end{cases}
$$

① همانطور که در روش Simple داشتیم اولین قدم حدس میدان فشار است (P^*)

$$
(\mathrm{II})\quad
\begin{cases}
a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_e (P_P^* - P_E^*) \\
a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + A_n (P_P^* - P_N^*) \\
a_t w_t^* = \sum a_{nb} w_{nb}^* + b + A_t (P_P^* - P_T^*)
\end{cases}
\Rightarrow
$$

از اینجا u^* و v^* و w^* بدست می‌آیند (u^* و v^* و w^* واقعی نیستند)

② حل معادلات فوق (مومنتوم) و معادله سرعت‌ها بدست می‌آید که واقعی نیستند

③ اعمال تصحیح روی میدان فشار حدس زده شده از طریق معادلات Pressure-Correction

$$P = P^* + P'$$

$$
\begin{cases}
u = u^* + u' \\
v = v^* + v' \\
w = w^* + w'
\end{cases}
\xrightarrow[\text{نظیر هم در دسته معادلات I و II}]{\text{کم کردن دو معادله}}
$$

$$a_e(u_e - u_e^*) = \sum a_{nb}(\overbrace{u_{nb} - u_{nb}^*}^{u'_{nb}}) + A_e\left[\underbrace{(P_P - P_P^*)}_{P'_P} - \underbrace{(P_E - P_E^*)}_{P'_E}\right]$$

$$a_e(u_e - u_e^*) = \underbrace{\sum a_{nb} u'_{nb}}_{\text{حذف به دلایل گفته شده در بالای صفحه قبل}} + A_e(P'_P - P'_E)$$

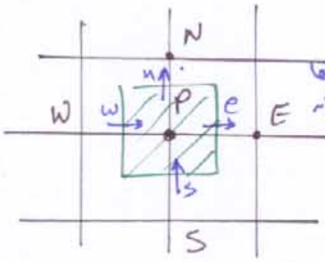
$$(u_e - u_e^*) = \frac{A_e}{a_e}(P'_P - P'_E)$$

$$
(\mathrm{III})\quad
\begin{cases}
u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E), & d_e \equiv \dfrac{A_e}{a_e} \\
v_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N), & d_n \equiv \dfrac{A_n}{a_e} \\
w_t = w_t^* + d_t (P'_P - P'_T), & d_t \equiv \dfrac{A_t}{a_t}
\end{cases}
$$

و به شکل فوق برای v_n و w_t هم داریم

← معادلات تصحیح سرعت براساس P'

④ به کمک P' میدان فشار و سرعت تصحیح شود. (از طریق معادله پیوستگی)



به محل سرعت‌ها دقت شود که شیفت داده شده‌اند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (\rho u A)_w - (\rho u A)_e + (\rho v A)_s - (\rho v A)_n = 0$$

به جای مقادیر u_w و u_e و v_n و v_s از روابط تصحیح سرعت جایگذاری می‌کنیم. (رابطه‌ی III)

$$(\rho A)_w\left[u_w^* + d_w(P'_P - P'_W)\right] - (\rho A)_e\left[u_e^* + d_e(P'_P - P'_E)\right]$$
$$- (\rho A)_n\left[v_n^* + d_n(P'_P - P'_N)\right] + (\rho A)_s\left[v_s^* + d_s(P'_P - P'_S)\right] = 0$$

پس از ساده‌سازی و حل

$$\Rightarrow a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \qquad (\mathrm{IV})$$

$$a_E = (\rho A d)_e,\quad a_W = (\rho A d)_w,\quad a_P = a_E + a_W + a_S + a_N,\quad b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)$$

⑤ حل متغیرهای دیگر توسط معادلات دیگر مسائل (اگر موجود باشند) (مثل توربولانس، معادلات توزیع غلظت و ...)

⑥ چک کردن ترم b، اگر صفر شده باشد به مرحله‌ی ۲ باز می‌گردیم.

بحث در مورد الگوریتم Simple

- معادله‌ی مربوط به p' تقریبی است و در حل نهایی تأثیری ندارد. (چون در حل نهایی p' صفر است)
- از لحاظ convergency میدان سرعت (ستاره‌دار) پیوستگی را در نهایت با p^* ارضا خواهد کرد و p' صفر می‌شود.
- ترم b را mass source یا extra mass (جرم اضافی) می‌نامند. وقتی میدان سرعت ستاره‌دار واقعی شود b = 0 خواهد شد
- به خاطر طبیعت تقریبی p' باید مقدار p را under relax کرد. (پیشنهاد برای تصحیح $\alpha_p = 0.8$ است)

$$P = P^* \alpha_p + P'$$

$$\alpha_p = 0.8$$

- در مسائلی که تراکم‌پذیری در آن قوی است معادله‌ی p' باید عوض شود چون در این نوع مسائل p روی ρ تأثیرگذار است. (بطورکلی نسبت سازی معادلات با توجه به تراکم‌پذیری منجر به روابطی می‌شود که تا حدود ماخ ۲ جواب می‌دهند)

Simple R (Simple_Revised)

به جای حل معادله‌ی تصحیح شده‌ی فشار، معادله را برای خود فشار را حل کنیم یعنی یک معادله‌ی فشار مستقل.

در روش Simple هم میدان سرعت را تصحیح می‌کردیم و هم میدان فشار که باعث می‌شود همگرایی طول بکشد.

حالا از معادله‌ی تصحیح فقط برای تصحیح میدان سرعت استفاده کنیم (نه فشار) و برای فشار یک معادله‌ی مستقل ایجاد کنیم.

روش SimpleR را اعمال کردیم.

در واقع در روش SimpleR دو معادله‌ی مستقل مورد استفاده قرار می‌گیرد:

۱- معادله‌ی تصحیح فشار برای تصحیح میدان سرعت

۲- معادله‌ی دومی که برای معادله‌ی فشار استفاده می‌شود

پس هدف ایجاد همگرایی سریع نسبت به روش Simple است.

دیدیم که در معادله‌ی P' تقریبی براساس حذف ترم‌های $\sum a_{nb} u'_{nb}$ وارد مسأله شده که این تقریب سبب می‌شود تا مقادیر تصحیح فشار بزرگ شود (حتی P' را باید under relax کرد تا از ایجاد اعداد بزرگ جلوگیری شود)

با این کار، اثر تصحیحات سرعت نقاط همسایه از معادله‌ی تصحیح سرعت برداشته می‌شود. تصحیح فشار (P') فقط در تصحیح سرعت اثر داشته، ملذا میدان سرعت را به خوبی تصحیح نمی‌کند، بنابراین میدان تصحیح فشار به کندی همگرا می‌شود.

(یعنی میل b به سمت صفر طول می‌کشد)

بنابراین بهتر است که از معادله‌ی تصحیح فشار فقط برای تصحیح سرعت استفاده شود و میدان فشار به گونه‌ی دیگر تصحیح شود.

قبلاً داشتیم (شماره‌ی I از صفحه‌ی قبل)

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + A_e (P_P - P_E) \Rightarrow u_e = \underbrace{\frac{\sum a_{nb} u_{nb}}{a_e}}_{\text{سرعت فرضی (Pseudo Velocity)}} + \underbrace{\frac{A_e}{a_e}}_{d_e} (P_P - P_E) \quad (۱)$$

$$\hat{u} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb}}{a_e} \quad (۲)$$

سرعت غیرواقعی (فرضی) که اثرات فشار دیگر در آن وجود ندارد.
(فقط سرعت‌های نقاط همسایه در آن موثر است)

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (P_P - P_E) \quad (۳)$$

$$v_n = \hat{v}_n + d_n (P_P - P_N) \quad (۴)$$

$$w_t = \hat{w}_t + d_t (P_P - P_T) \quad (۵)$$

براساس آنچه قبلاً گفته شد برای معادله‌ی پیوستگی

$$a_P P_P = \sum a_{nb} P_{nb} + b \quad (۶)$$

$$b = \frac{(\rho_P^* - \rho_P)\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + \left[(\rho \hat{u})_w - (\rho \hat{u})_e\right]\Delta y \Delta z + \left[(\rho \hat{v})_s - (\rho \hat{v})_s\right]\Delta x \Delta y + \left[(\rho \hat{w})_b - (\rho \hat{w})_t\right]\Delta x \Delta z \quad (۷)$$

اختلاف اصلی این معادله با معادله‌ی تصحیح فشار در الگوریتم Simple آن است که هیچ تقریبی در استخراج این معادله اعمال نشده است، ثانیاً ترم b براساس مقادیر سرعت‌های واقعی حل می‌شود.

قدم‌های الگوریتم SimpleR

۱. حدس میدان سرعت

۲ـ محاسبه‌ی ضرائب معادلات مومنتم و محاسبه‌ی $\hat{u}$ و $\hat{v}$ و $\hat{w}$ از روی معادله‌ی (۲) (صفحه قبل)

۳ـ محاسبه‌ی ضرائب معادله‌ی فشار و حل آن (معادله‌ی ۶)

۴ـ استفاده از این میدان فشار به عنوان p^* و حل معادلات مومنتم برای u^* و v^* و w^*

۵ـ محاسبه‌ی b (برای معادله‌ی تصحیح فشار)

۶ـ تصحیح میدان سرعت توسط معادلات تصحیح سرعت

۷ـ حل دیگر معادلات (... ، غلظت)

۸ـ برگشت به قدم دوم

مقایسه با Simple

مراحل الگوریتم Simple به شرح زیر است:

۱ـ حدس p^* و u^* و v^* و w^*

۲ـ حل معادله مومنتم برای محاسبه‌ی u^* و v^* و w^*

۳ـ حل معادله‌ی p' و اصلاح فشار

۴ـ تصحیح سرعت‌ها و p

۵ـ حل دیگر معادلات

۶ـ بازگشت به مرحله ۲

✓ تعداد مراحل در SimpleR بیشتر از الگوریتم Simple است ضمن اینکه یک معادله بیشتر هم حل می‌کنیم اما ادعا می‌شود که SimpleR، Convergency بهتری از Simple دارد.

✓ SimpleR در کجاها بهتر از Simple عمل می‌کند؟

- در جریانات رینولدز بالا و نواحی چرخشی بزرگ SimpleR بهتر جواب می‌دهد
- در جریاناتی که momentum-driven هستند و pressure-driven نیستند.

عیب در مورد SimpleR

- میدان فشار حدسی (p^*) در Simple نقش مهمی داشت (چون هم میدان سرعت و هم میدان فشار با آن تصحیح می‌شد) ولی در الگوریتم SimpleR از این میدان فشار حدسی استفاده نمی‌کنیم.
- تکرار در SimpleR گران‌تر از Simple است (مراحل بیشتری دارد) اما به تعداد Iteration کمتری برای همگرایی نیاز دارد.
- SimpleR به مقدار Relaxation Factor کمتری حساس است.

معرفی جریان توربولانس در CFD

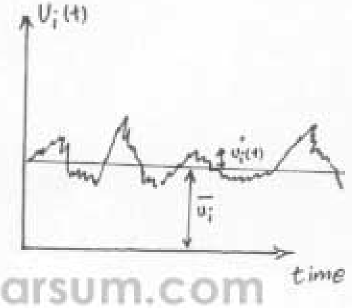
مشخصه توربولانس چیست؟

✓ غیردائمی و پریودیک است و تمام سه مولفه سرعت حضور دارد. رفتار غیردائمی (unsteady) تکرار می‌شود (fluctuate)

اختلاط در این جریان هم است. نرخ تبادل مومنتم و انرژی نیز اهمیت دارد.

در جریان لامینار انتقال در مقیاس مولکولی مدنظر بود و برخورد مولکول‌ها باعث انتقال مومنتم بین لایه‌ها می‌شد.
این انتقال بین لایه‌های پرسرعت و کم‌سرعت صورت می‌گیرد (لایه پرسرعت کند می‌شود و لایه کم‌سرعت تندتر می‌شود)
این تبادل را به صورت تنش برشی نشان می‌دهیم. (نتیجه تبادل، انتقال نیرو است که تنش برشی را تولید می‌کند)

✓ در جریان توربولانس علاوه بر انتقال در مقیاس مولکولی، توده‌های سیال هم وارد کار می‌شوند. پس مومنتم‌های قوی می‌توانند جابجا شوند و این باعث بالا رفتن نرخ انتقال می‌شود. (انتقال جرم، مومنتم یا انرژی)



$U_i(t) = \bar{U}_i + U_i'(t)$

مقدار ثابت که متوسط در طول زمان

✓ کمیت‌ها در جریان توربولانس می‌توانند به دو مورد تجزیه شوند که از یک مقدار متوسط و یک مقدار متغیر تشکیل شده است.

✓ تعریف Re برای جریان توربولانس

$$Re_L = \frac{\rho U L}{\mu}$$

$L = x, D, D_h, \dots$

External Flow

$Re_x \geq 5\times10^5$ along or surface

$Re_D \geq 20000$ around an obstacle

Internal Flow

$Re_D \geq 2300$

Natural Convection

$Ra \geq 10^8 \sim 10^{10}$

نکته: در جریان درون لوله می‌توان با حذف عوامل آشفته‌ساز مثل کاهش اصطکاک، حذف لرزش و ... تا $Re = 40000$ جریان آرام داشت.

✓ ما به جای حل معادلات یک مدلی ارائه می کنیم که بتوانیم توسط آن بخشی از طبیعت پیچیده‌ی جریان توربولان را بررسی کنیم.
(آن را ساده‌تر می کنیم)

ما به جای طبیعت unsteady یک طبیعت steady جایگزین می کنیم که به طور انتگرالی، تأثیرات را در جریان حفظ کند.

نکته: ما در مدل سازی انتخاب های متفاوتی می توانیم داشته باشیم که بستگی به موارد زیر دارد:

۱. چه امکانات کامپیوتری در اختیار داریم (از نظر حجم محاسبات و سرعت)

۲. فیزیک جریان توربولان چگونه است. (استفاده از یک مدل واحد برای همه‌ی جریان‌ها امکان‌پذیر نیست)

۳. چه دقتی مورد نیاز است.

۴. چه محدودیت زمانی باید مورد توجه قرار گیرد.

که موارد فوق روی نوع شبکه‌ی مورد استفاده‌ی ما و نوع دقت مدل انتخابی موثر است

✓ نحوه‌ی رفتار جریان در کنار دیواره خیلی مهم است چون اتفاقات مهم در همینجا می افتد. در حقیقت مدل ما توانایی نمایش رفتار کنار دیواره را باید داشته باشد.

✓ در معادلات توربولانی با مفهوم eddy viscosity روبرو می شویم. در معادلات ناویراستوکس ترم‌هایی بوجود می آیند که به تنش تعبیر می شوند و آنها را تنش‌های توربولانی می نامیم. در حقیقت ما مجهولات اضافی داریم که باید جلوی آن را توسط مدل سازی محاسبه کرد.

سعی ما این است که این تنش‌های اضافی را به پارامترهای متوسط ربط دهیم. ضریب رابط را در اینجا μ_t می نامیم. که μ خاصیت جریان است (ویسکوزیته)

μ_t تابع مکان و زمان است (در همه‌ی نقاط متفاوت است)

✓ در جریان توربولانی تنش دو قسمت توربولانی و لامیناری دارد که اولی با μ_t با پارامترهای متوسط در ارتباط است و دومی با μ.

✓ یک مدل ایده‌آل مدلی است که طیف زیادی از جریان‌ها را شامل شود

مدل سازی توربولانس
- eddy vis. models
  - algebric: ν_t, L
  - first order — diffusion: one equ. model, two equ. model, low Reynolds
  - second order — RSM → ASM (شکل ساده‌تر)
    - حل ۷ معادله دیفرانسیل پاره‌ای برای تنش‌های رینولدز
- advanced
  - linear eddy visc
  - non-linear eddy visc. ← تنش‌های رینولدز با پارامترهای دقت مدل‌ها شد. (با خطی‌سازی)

استخراج معادله برای جریان توربولانس

derivation of the time-averaged equ.

ترم میانگین جریان

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \qquad \bar{\phi} = \int_t^{t+\delta t} \frac{1}{\delta t}\, \phi \, dt$$

ترم اختلالی

قواعد متوسط‌گیری زمانی ←

$$\overline{\phi'} = 0 \quad , \quad \overline{\phi_1 \phi_2} = \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 + \overline{\phi_1' \phi_2'}$$

معادله کلی

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{\phi}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{u}_i \bar{\phi}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} - \underbrace{\rho \overline{u_i' \phi'}}_{\text{Turbulent diffusion flux}}\right) + \bar{S}$$

Turbulent diffusion flux

به علت همین توربولانس ایجاد شده است

برای مومنتوم ←

با استفاده از معادلات فوق داریم.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i U_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \rho \overline{u_i' u_j'}\right) + S_j$$

تنش توربولانسی یا تنش رینولدز نام دارد. در بیشتر مناطق جریان این ترم بسیار بزرگ‌تر از تنش ویسکوز است ($\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$)

تعریف: Turbulence modeling: یک مدل توربولانس تعریفی معادلات است که عبارات انتقال توربولانس در سیستم معادلات میانگین زمانی را محاسبه می‌کند.

$$-\rho\overline{u'v'},\ -\rho\overline{u'u'},\ -\rho\overline{v'v'},\ -\rho\overline{u'w'},\ -\rho\overline{v'w'},\ -\rho\overline{w'w'}$$

(برای مومنتوم شش مجهول جدید روبرو تولید می‌شوند)

اثرات توربولانس خود را در معادلات به فرم ترم‌هایی مثل $\rho \overline{u'v'}$ نشان می‌دهد. که تنش‌های توربولانسی نام دارند.

eddy viscosity

اولین بار توسط Boussinesq در سال ۱۸۷۷ مفهوم آن بیان شد در رابطه زیر برای هر ترم از تنش های توربولانسی قابل بیان شد.

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3} k \rho \delta_{ij}$$

$$k = \frac{1}{2}\left(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}\right)$$

→ turbulent kinetic Energy per unit mass

هر جریان توربولان نوعی انرژی جنبشی دارد. (بر اساس $\bar{u}$ و بر اساس u')

ترم $\frac{2}{3} k\rho \delta_{ij}$ - را در داخل ترم فشار قرار می‌دهیم.

$$P = p + \frac{2}{3} k\rho$$

در انتها باید این مقدار از فشار کم شود تا فشار واقعی بدست آید.

با یادآوری اینکه μ_t هم تابع زمان و هم مکان است.

gradient diffusion hypothesis

$$-\rho \overline{u_i' \varphi'} = \Gamma_t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$$

$$\Gamma_t = \frac{\mu_t}{\sigma_t}$$

Prandtl number

σ_t:
- برای جت‌ها و جریان آزاد → ۰٫۵
- برای لایه‌های مرزی نزدیک دیوار → ۰٫۹

مفهوم فیزیکی eddy visc.

مانند آنچه در جریان لایه‌ای بین مولکول‌ها اتفاق می‌افتد، در اینجا نیز ادی‌ها با هم برخورد می‌کنند و در نهایت این برخورد باعث تبادل مومنتوم می‌شود. (البته تفاوت مکانیزم برخورد در ادی‌ها با مولکول‌ها این است که ادی‌ها می‌توانند همدیگر را بشکنند یا در همدیگر ممزوج شوند)

I. $\mu_t = (\text{Constant}) \cdot \rho \cdot V_t \cdot l$

ثابت ، دانسیته ، سرعت ، طول ما

تنش‌های توربولانسی $(-\rho \overline{u'v'}, \dots)$ → μ_t → V_t ، l

که ساده‌سازی ما منجر شد در اینجا به دو مجهول جدید برسیم.

مدل‌هایی که محاسبه V_t و l را فراهم می‌کنند دو دسته هستند:
مدل‌های جبری، مدل‌های دیفرانسیلی

 ۵

مدل‌های جبری

Constant eddy visc. model : یعنی یک μ_t ثابت در تمام جریان فرض می‌کنیم. برای بعضی از جریان‌ها بصورت کیفی قابل بررسی هستند. یعنی روند کار قابل پیش‌بینی است اما از لحاظ کمیتی مقادیر دقیقی نمی‌دهد.

Prantl's free-shear-layer model : مدل لایه برشی آزاد پرانتل: دارای یک گرادیان سرعت در آن وجود دارد. (مثل ویک و جت)

موثر در هر مقطع

$$V_t = |U_{max} - U_{min}|$$

V_t را ورتیسیتی می‌گیریم.

$$L = \delta$$

ضخامت جت

ثابت c به نوع جریان وابسته است.

c=0.01 mixing layer

c=0.016 plane jet

c=0.026 plane wake

$$\mathrm{I}\quad \mu_t = C\rho\delta\,|U_{max} - U_{min}|$$

ثابت

The mixing-length model : جریان‌هایی که گرادیان سرعت قابل ملاحظه در آن در جهت عرضی باشد. (جهت عمود بر x)

پیشنهاد در روش مقاطع برشی که جواب داده‌است:

$$V_t = l_m\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$L = l_m$$

[این مدل هم آقای پرانتل در سال ۱۹۲۵ مطرح کرد]

$$\mathrm{II}\quad \mu_t = \rho l_m^2\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

مجهول ما

عبارات جبری نیاز است که l_m را برای ما توضیح دهد.

for more general flows:

$$\mu_t = \rho l_m^2\left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)\right]^{1/2}$$

وقتی گرادیان سرعت در جهت‌های دیگر هم مهم باشد

✓ برای محاسبه‌ی l_m دو گروه رابطه ارائه شده است. یکی برای free shear layer و دیگری برای wall boundry layer

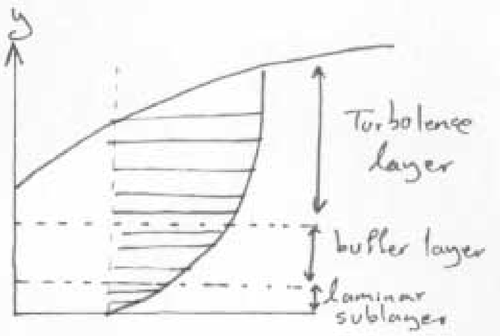
محاسبه‌ی lm :

برای free shear layer : فرض می‌شود lm در عرض shear layer ثابت است (ولی با δ متناسب است)

پس برای $\frac{l_m}{\delta}$ مقدارهایی پیشنهاد شده است

۰٫۷ → mixing layer
۰٫۰۹ → plane jet
۰٫۰۷۵ → round jet
۰٫۱۶ → plane wake

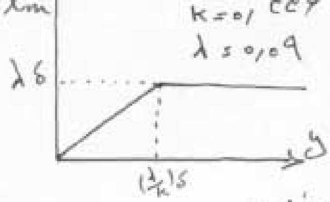
برای wall boundary layer : منظور جریان‌هایی که از یک یا دو طرف با دیواره محدود هستند. برای محاسبه‌ی lm آن را تابعی از فاصله تا دیواره در نظر می‌گیریم و از یک y به بعد، براساس یک شکل تابع، مقدار تابع عوض می‌شود.



لایه‌ی مرزی توربولانی به سه بخش تقسیم می‌شود

$$l_m = \kappa y \,,\quad y \le \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)\delta$$
$$l_m = \lambda \delta \,,\quad y > \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)\delta$$

با دور شدن از دیواره lm بزرگتر می‌شود. یعنی μ_t قوی‌تر می‌شود (در رابطه‌ی II صفحه قبل را ببین)



laminar sublayer ← حرف اول را μ می‌زند (از جنس لزجت) تنش برشی دیواره ادی را خورد می‌کند و توربولانس محدود می‌شود.

buffer layer ← تنش برشی و تنش برشی توربولانس هم مقیاس هستند (μ و μ_t قابل مقایسه هستند)

Turbolence layer ← μ_t در مقابل μ فوق‌العاده قوی است. (تنش غالب، تنش توربولانی است)

نتیجه: هرچه از دیواره دور شدیم μ_t قوی‌تر شده است که مدل فوق برای lm این را نشان می‌دهد.

نکته: در جریان‌هایی که از هر طرف به دیواره محدود باشند نیاز به اصلاحاتی در فرمول‌های فوق وجود دارد.
مثلاً برای جریان توسعه‌یافته درون لوله‌ها آقای نیکورادزه رابطه زیر را مطرح می‌کند.

$$\frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.08\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 0.06\left(\frac{r}{R}\right)^4$$

یا مثلاً برای داکت‌هایی که شکل منظم ندارند:

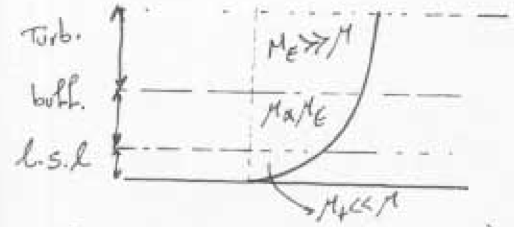
$$l_m^{-1} = 1.25\int_0^{2\pi} r^{-1}\, ds$$

(در این روش زیاد استفاده نمی‌شود)

نکته: در مورد ساختارهایی که در دیواره محدودیت اطراف هستند فاصله‌ای که در نظر می‌گیریم، فاصله‌ی کوتاه‌تر مبنای ما در [illegible] خواهد بود.

نکته: مدل‌ها اکثراً برای external flow ها جواب‌های بهتری می‌دهند تا Internal flow ها.

نکته: همه‌ی اتفاقات و تغییرات مهم در کنار دیواره است. ما باید نزدیک دیواره را با ترتیب خوب محاسبه کنیم. یک راه، شبکه‌بندی ریزتر در نزدیکی دیواره است. (شیب پروفیل در کنار دیواره زیاد است)



ما می‌خواهیم بین نقطه روی دیواره و اولین نقطه بیرون l.s.l پل بزنیم تا پروفیل دقیق‌تری داشته باشیم و این اطلاعات برای این کار را از اندازه‌گیری به دست می‌آوریم.

← رفتار داده‌ی نزدیک دیواره براساس یک سری توابع universal به نام wall function قابل طرح است. کار این توابع یونیورسال این است که دو نقطه را به هم وصل کنند، تنش برشی روی دیواره را به شرایط جریان در خارج لایه‌ی کنار دیواره ربط می‌دهند.

در این کار به جای استفاده از تعداد زیادی نقطه استفاده می‌شود.

← قوانین دیواره (wall function) معمولاً برای سطوح تخت استخراج شده و استفاده می‌شود. (برای دیگر سطوح نیاز به تصحیح دارند)

نکته: اصطلاحاً به روش‌هایی که از wall function استفاده می‌کنند high Reynolds می‌گویند. (پل زدن بین l.s.l و خارج از لایه)

شد:

$$\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{E \rho U_\tau y}{\mu}\right)$$

$U_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2}$ $E = 9$ for smooth walls

$K = 0.448$

نکات در مورد mixing length :

✓ محدود به جریانات ساده است. (سیرکولاسیون ... را مدل نمی‌کند)

✓ برای جریان های داخلی بهتر است از آن استفاده شود (برای external flow مناسب نیست)

✓ در جایی که $\frac{\partial u}{\partial y}$ صفر شود مقدار μ_t صفر است. که اشکال بزرگی ایجاد می کند. (مثلاً در جریان داخل یک کانال دقیقاً جایی که گرادیان سرعت صفر می شود وسط کانال است جایی که μ_t حداکثر است)

✓ حتی برای جریان های ساده، l_m یک مقدار universal ندارد.

معادله انرژی جنبشی توربولانس :

$$K = \frac{1}{2}(U)^2 + \frac{1}{2}(V)^2 + \frac{1}{2}(W)^2$$

← انرژی جنبشی

$\bar{u} + u'$

در هر نقطه دو نوع انرژی جنبشی داریم:
یکی بر اساس $\bar{u}$ و $\bar{v}$ و $\bar{w}$ و دیگری بر اساس u' و v' و w' (صفحه ۴)

$$K = \frac{1}{2}\left(u'^2 + v'^2 + w'^2\right)$$

← انرژی جنبشی توربولانسی

$$K^{1/2} = V_t \xrightarrow[\text{در معادله صفحه ۷ I}]{\text{جایگذاری}} \mu_t = \rho K^{1/2} L$$

حالا مجهول ما به جای V_t و l به K و l تغییر کرد و ما باید دنبال رابطه ای برای K و l باشیم.

نکته: مدل هایی که یک معادله دیفرانسیل برای K نوشته می شود و l از شرایط غیر دیفرانسیلی بدست می آید را one equation model می نامیم.

two equation model مدل هایی هستند که یک معادله برای K و یک معادله برای l حل می کنند.

برای محاسبه l روش های مختلفی وجود دارد. روش جایگزین کردن ε و ω (روش k-ε و k-ω)

معادله دیفرانسیل برای k از معادلات ناویر استوکس استخراج می شود (برای high Reynold number)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho K)}_{\text{unsteady term}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i k)}_{\text{Convection term}} = \underbrace{D}_{\text{diffusion term}} + \underbrace{P}_{\text{Production term}} - \underbrace{\rho\varepsilon}_{\text{Dissipation term}}$$

نابود کردن انرژی

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i K) = D + P - \rho\varepsilon$$

$$P = -\left(\overline{\rho u_i' u_j'}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) \longrightarrow$$ کار انجام شده توسط تنش های توربولانی روی جریان

rate of strain term

$$D = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\mu_t}{\sigma_K}\right)\frac{\partial K}{\partial x_i}\right] \longrightarrow$$ ترم دیفیوژن $\sigma_K = 1$

$$\varepsilon = C_D \frac{K^{3/2}}{L} \longrightarrow$$ نرخ استهلاک انرژی توربولانی در جریان $C_D = 0.09$

(ε به K و L بستگی دارد)

انرژی جنبشی — طول مشخصه طولی

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i K) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_K}\frac{\partial K}{\partial x_i}\right) + \mu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_D\rho\frac{K^{3/2}}{L}$$

$\sigma_K = 1$

$C_D = 0.09$

معادله ی کلی دیفرانسیل استخراج شده برای K از روی معادلات ناویر استوکس.

نکته: اگر تمام ترم ها به جز Production term و dissipation term قابل صرف نظر باشد، یعنی جریان طوری است که هر چقدر انرژی توربولانی تولید می شود، همانقدر هم دمپ می شود. به عبارتی Product = dissipate

$$\mu_t\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = C_D\rho\frac{K^{3/2}}{L} \quad \text{و} \quad \mu_t = \rho K^{1/2} l$$

فرم کلی μ_t که پرانتل مطرح کرده بود.

$$\text{(I)} \quad \mu_t = \rho l_m^2\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\text{if } l_m = \frac{L}{C_D^{1/4}} \xrightarrow{(I)} \mu_t = \rho l^2 C_D^{-1/4}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

نکته مهم: منظور از low Reynolds مدلی است که معادلات مومنتوم، k و ... تا روی دیواره انتگرال‌گیری می‌شود (یعنی شرط مرزی درست روی دیواره است)

منظور از High Reynolds مدلی است که معادلات فوق تا نقطه‌ای نزدیک دیواره که خارج از Sub layer است انتگرال‌گیری می‌شود و مقدار فاصله تا دیواره توسط قانون دیواره (wall law) ارضا می‌شود.

The k-ε model

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) + P - \rho\varepsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right) + \underbrace{(C_1 P - C_2\rho\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)}_{\text{Source Term}}$$

- این مدل جواب‌های خوبی می‌دهد معمولاً زمانی که انتقال حرارت بر جریان غالب شود.

- این مدل زیر مجموعه two equ. model است.

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \sim V_t l_t \rho$$

$$\begin{cases} l_t \sim \dfrac{k^{3/2}}{\varepsilon} \\ V_t = k^{1/2} \end{cases}$$

✓ مدل‌های دو معادله‌ای مثل k-ε می‌تواند توزیع l را بدست بدهد و برای هر جریان پیچیده‌ای موارد را جواب می‌دهد.

$$C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

← بصورت تجربی این مقادیر بدست آمده است

The wall function treatment (launder & spolding 1974)

$$u^+ = \frac{u\mu}{\tau_w y} = \left(\frac{1}{k}\right)\frac{\ln(E y^+)}{y^+}$$

فاصله‌ی بی‌بعد از دیواره

$$y^+ = \rho k^{1/2} C_\mu^{1/4}\frac{y}{\mu}$$

$$30 \le \frac{\rho u^+}{\nu} \le 110$$

$$\varepsilon = (C_\mu k^2)^{3/4}\frac{1}{ky}$$

✓ برای ناحیه fully turbolent ($\mu_t \gg \mu$) صادق است

✓ ناحیه نزدیک دیوار بوسیله wall function قابل بررسی است.

✓ بوسیله مقادیر u، k و ε و ... خارج از ناحیه‌ی Sublayer

تنش برشی دیوار τ_w بوسیله‌ی logarithmic law قابل تعمیم است

✓ این معادلات در جاهایی مناسب است که مدلسازی‌ها روی دیواره خیلی خوب نشد

$k = 0$ روی دیواره (چون U و V و W صفر است)

✓ این معادلات برای جریانهای مهم قابل استفاده نیست، مثل relaminarization، ترنزیشن، مدلسازی‌های عملی خوبی

جریانی که دوباره ها آرام می‌شود

The low Reynolds number k-ε (Jones & launder 1972-1973)

در جریان‌های پیچیده استفاده از قانون دیواره کار درستی نیست (استفاده از high Reynolds درست نیست)

باید معادلات را تا دیواره انتگرال‌گیری کنیم.

باید ترم‌هایی به k و ε اضافه کرد تا تغییرات را تا خود دیواره محاسبه کند.

$$R_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}$$

→ local Reynolds number

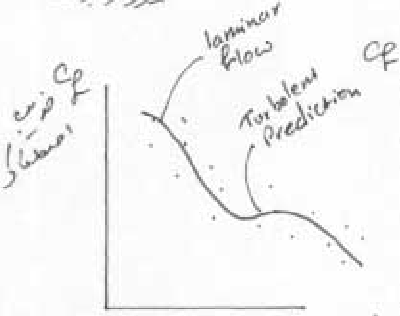
رینولدز توربولانسی

$$S_{k,extra} = -2\mu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j} \right)^2$$

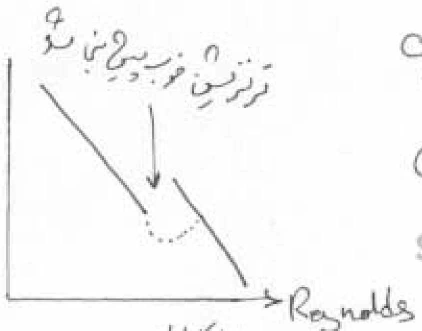
$$S_{\varepsilon,extra} = 2 \left(\mu \frac{\mu_t}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2$$

$$C_\mu = 0.09\, e^{\left(\frac{-2.5}{(1+0.02R_t)^2} \right)}$$

$$C_2 = 1.92 \left(1 - 0.2222\, e^{\left(-\frac{R_t^2}{36} \right)} \right)$$



برای کانال دوبعدی



برای لوله